Contrôle 1 : Approximation de fonctions

Durée du contrôle : 2 heures

Les documents de cours sont autorisés.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront prises en compte dans la note finale.

Exercice 1. (3 points)
Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points
$$\{(0,-1),(2,2),(3,9),(5,87)\}.$$
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que
$$P(-1)=-1,\quad P'(-1)=0,\quad P(1)=1,\quad P'(1)=0.$$
3. Justifier qu'il n'existe pas un unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 passant par les points
$$\{(0,1),(1,0)\}.$$

Exercice 2. (6 points)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et 2π-périodique telle que $f(x)=x^2$ pour $x\in[-\pi,\pi[$.

1. Tracer le graphe de la fonction f sur $[-3\pi,3\pi]$.
2. Déterminer l'expression de la somme partielle de Fourier $S_n(f)$.
3. Que peut-on dire de la convergence (simple, uniforme et en moyenne quadratique) de $S_n(f)$?
4. En déduire le développement en série de Fourier de f ainsi que les valeurs des séries
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\quad\text{et}\quad\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$
Indice : Ici, on n'utilisera pas l'égalité de Parseval, mais l'expression du développement en série de Fourier de f directement.
5. Rappeler l'égalité de Parseval et en déduire la valeur de la série
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}.$$

Exercice 3. (4 points)
Soient $(x_i)_{1\le i\le n+1}$, $n+1$ réels distincts, et $(y_i)_{1\le i\le n+1}$, $n+1$ réels quelconques. On note $\mathcal{B}=\{N_j; 1\le j\le n+1\}$, une base de l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$N_1(x)=1,\qquad N_j(x)=\prod_{k=1}^{j-1}(x-x_k)\quad\text{pour } 2\le j\le n+1.$$

fabien.vergnet@sorbonne-universite.fr

On cherche un polynôme p_n sous la forme

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{j=1}^{n+1} d_j N_j(x), \\ &= d_1 + \sum_{j=1}^{n+1} d_j \prod_{k=1}^{j-1}(x - x_k) \end{aligned}$$

avec des coefficients $(d_j)_{1\le j\le n+1}$ à déterminer, tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$

$$p_n(x_i) = y_i.$$

En d'autres termes, on cherche les coefficients (d_j) de l'expression du polynôme interpolateur de Lagrange p_n dans la base $\mathcal{B}$.

1. pour $i = 1$, $i = 2$ et $i = 3$, écrire explicitement l'égalité $p_n(x_i) = y_i$ en développant sommes et produits dans l'expression de $p_n(x_i)$.
2. En déduire que le vecteur des coefficients $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{n+1})^t$ est solution d'un système linéaire

$$T\mathbf{d} = \mathbf{y},$$

   que l'on explicitera, où $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n+1})^t$ et $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
3. Justifier que la matrice T est inversible.
4. Pourquoi cette approche est-elle plus intéressante pour le calcul du polynôme interpolateur de Lagrange, que l'approche qui consiste à déterminer les coefficients dans la base canonique de $\mathcal{P}_n$ (vue dans l'exercice 3 du TD 1) ?

Exercice 4. (4 points)
Dans son *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, Joseph Fourier écrit

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \cos(x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \cdots = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{pour } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{pour } |x| = \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4} & \text{pour } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi. \end{cases} \tag{1}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire telle que, pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si } x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

1. Tracer la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et donner l'expression de sa somme partielle de Fourier, $S_n(f)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Justifier alors l'égalité (1) donnée par Joseph Fourier dans son *Mémoire sur la propagation de la chaleur*.

Exercice 5. (3 points)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.

1. Montrer que les coefficients complexes

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \quad \text{et} \quad c_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)dt,$$

   sont nuls.

2. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{Z}^\star$, les coefficients complexes de Fourier de f' s'écrivent

$$c_k(f') = ikc_k(f).$$

3. En déduire l'inégalité suivante :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt.$$

fabien.vergnet@sorbonne-universite.fr