Contrôle continu 1

Durée du contrôle : 1 heure

Les documents ne sont pas autorisés à part une feuille manuscrite recto-verso.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront prises en compte dans la note finale.

Exercice 1. (5 points)
Des paléontologues ont déterré 5 spécimens fossiles d'une espèce animale disparue pour lesquels on possède les mesures de la longueur en cm de leur humérus et de leur fémur, regroupés dans le tableau ci-dessous.

humérus (cm)	44	65	71	75	87
fémur (cm)	40	60	59	65	77

Ces mêmes scientifiques ont ensuite découvert un autre fossile dont l'humérus mesure 55 cm, mais dont le fémur est manquant.

Proposer une méthode permettant d'obtenir une estimation de la taille du fémur de cet animal (aucun calcul n'est demandé, seule la formulation mathématique du problème à résoudre est attendue).

Exercice 2. (10 points)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Considérons une subdivision uniforme de $[a, b]$ avec $m + 1$ points $a = a_1 < \cdots < a_{m+1} = b$ tels que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i+1} - a_i = h = \frac{b-a}{m}$.

Dans cet exercice nous cherchons à obtenir une estimation de l'erreur d'interpolation lorsque l'on fait de l'interpolation par morceaux de degré n pour la fonction f, en fonction du pas de discrétisation h.

On rappelle que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $y_x \in]a, b[$ tel que l'erreur d'interpolation entre f et son polynôme interpolateur de Lagrange p_n en $n + 1$ points d'interpolation $(\xi_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ de $[a, b]$ est donnée par

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y_x)}{(n+1)!} \prod_{j=1}^{n+1} (x - \xi_j).$$

1. Sur chaque sous-intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on considère $n + 1$ points d'interpolation $(\xi_j^i)_{1 \leq j \leq n+1}$. Montrer que, pour tout $x \in [a_i, a_{i+1}]$, l'erreur d'interpolation $E_i(x)$ vérifie

$$|E_i(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a_i,a_{i+1}]}}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

2. En déduire que, pour tout $x \in [a, b]$, l'erreur d'interpolation $E(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ vérifie

$$|E(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

3. Considérons la fonction $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que, pout tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{2x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.$$

fabien.vergnet@sorbonne-universite.fr

4. Étudier les variations de g' sur l'intervalle $[-5, 5]$ et montrer que

$$\|g'\|_{\infty,[-5,5]} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

5. On considère une discrétisation uniforme $([a_i, a_{i+1}])_{1 \leq i \leq m}$ de l'intervalle $[-5, 5]$ de pas de discrétisation h et on note $p_{0,h}$ le polynôme constant par morceaux qui réalise l'interpolation de Lagrange de degré 0 pour la fonction g sur chaque sous-intervalle $[a_i, a_{i+1}]$. Déduire des questions précédentes une estimation de l'erreur d'interpolation $|g(x) - p_{0,h}(x)|$ sur $[-5, 5]$ en fonction du pas de discrétisation h. Comment se comporte cette erreur lorsque $h \to 0$?

Exercice 3. (5 points)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à 1 tel que

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0).$$

   Il s'agit du polynôme interpolateur de Hermite pour la fonction f au point 0.

2. Utiliser ce polynôme interpolateur de Hermite pour obtenir une formule de quadrature afin d'approcher le calcul de l'integrale

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

3. Montrer que cette formule de quadrature est exactement d'ordre 1.