CC1 : interpolation et méthode de quadrature

Durée du contrôle : 1 heure

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.

Exercice 1. (6 points)
Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ sous forme de fraction rationnelle.

1. (2 points) Soit $I = [\frac{16}{9}, \frac{9}{4}]$. Déterminer le polynôme interpolateur de Lagrange, noté p pour la fonction f définie sur I par $f : x \in I \mapsto \sqrt{x}$ aux points $\frac{16}{9}$ et $\frac{9}{4}$.
2. (1 point) À l'aide de p, donner alors une valeur approchée de $\sqrt{2}$.
3. (3 points) En utilisant un résultat du cours, estimer l'erreur entre $\sqrt{2}$ et la valeur calculée.

Exercice 2. (4 points)
Soit $f \in C^2([-1,1];\mathbb{R})$.

1. (1 points) Montrer qu'il existe un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à 1 tel que
$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0).$$
Il s'agit du polynôme interpolateur de Hermite pour la fonction f au point 0.
2. (1 point) Pour tout $x \in [-1,1]$, montrer que
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)dt.$$
On pourra commencer par intégrer par parties l'intégrale présente dans cette formule.
3. (2 points) Déduire de ce qui précède une estimation de l'erreur d'interpolation,
$$|f(x) - p(x)| \quad \text{pour tout } x \in [-1,1].$$

Exercice 3. (10 points)
Soit $f \in C^4(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

1. (2 points) Déterminer le polynôme interpolateur de Lagrange p de f aux points $\{-1, 0, 1\}$.
2. (2 points) Utiliser ce polynôme p pour construire une formule de quadrature afin d'approcher l'intégrale
$$\int_{-1}^1 f(x)dx.$$
3. (2 points) Généraliser cette formule de quadrature sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ quelconque.
4. (1 point) On considère une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$ en $N \in \mathbb{N}^*$ sous-intervalles que l'on note $([a_i, a_{i+1}])_{i=1,\dots,N}$, de taille $h = \frac{b-a}{N}$. Proposer une formule de quadrature composée pour cette méthode.
5. (3 points) Étudier comment ce comporte l'erreur de quadrature de cette méthode de quadrature composée lorsque h tend vers 0.