CC1 : interpolation, régression et méthode de quadrature

Durée du contrôle : 2 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.

Exercice 1. (4 points)
Soient f et g les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(x^3 - 1)$ et $g(x) = x(x^2 - 1)$.

1. (2 points) Calculer la forme de Newton du polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f relativement aux points
$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \text{ et } x_3 = 2.$$
2. (1 point) Même question en ajoutant le point $x_4 = -2$.
3. (1 point) Déterminer le polynôme interpolateur de la fonction g relativement aux points x_1, x_2, x_3 et x_4.

Exercice 2. (8 points)
Considérons les polynômes suivants

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{3}{2}(x^2 - \frac{1}{3}) \quad \text{et} \quad L_3(x) = \frac{5}{2}(x^3 - \frac{3}{5}x).$$

Notons $E = C^0([-1,1];\mathbb{R})$ et F l'ensemble des éléments p de E qui s'écrivent $p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i L_i(x)$, où les $(a_i)_{i=0,\dots,3}$ sont des coefficients réels. Nous rappelons également que la norme $\|f\|_{L^2}$ pour une fonction de E s'écrit
$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$
et qu'elle dérive du produit scalaire défini par
$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in E.$$

1. (2 points) Calculer les quantités $\langle L_i L_j\rangle_{L^2}$ pour tous $i, j \in \{0, \dots, 3\}$ et en déduire que la famille $(L_i)_{i=0,\dots,3}$ est une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Indication : on rappelle que, dans un espace de dimension $n \in \mathbb{N}$, une famille libre de taille n est une base.
2. (1 point) Que conclure sur F ?
3. (1 point) Soit $f \in E$. Justifier que le problème $\min_{p\in F} \|f - p\|_{L^2}$ admet une unique solution. Comment peut-on la caractériser ?
4. (2 point) Montrer que les coefficients $(a_i)_{i=0,\dots,3}$ de cet unique p vérifient,
$$a_i = \frac{\langle f, L_i\rangle_{L^2}}{\|L_i\|_{L^2}^2}, \quad \forall i \in \{0, \dots, 3\}$$

5. (2 points) Considérons maintenant $f(x) = e^x$ sur $[-1, 1]$. Calculer les quantités suivantes,

$$\langle f, L_i \rangle_{L^2}, \quad \forall i \in \{0, \dots, 3\},$$

et déterminer le polynôme $p \in F$ de meilleure approximation de la fonction exponentielle pour la norme $\| \cdot \|_{L^2}$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 3. (3 points)

Soient $[a, b]$ un intervalle réel et n un entier naturel non nul. On considère les points d'interpolations

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$$

et le polynôme d'interpolation p_n tel que

$$p_n(x_i) = e^{x_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\}.$$

En utilisant une inégalité du cours, montrer que la suite de polynômes interpolateur $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction exponentielle lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire que

$$\sup_{x \in [a,b]} |p_n(x) - e^x| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Exercice 4. (5 points)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère trois points d'interpolation $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ et $\xi_3 = 1$.

1. (2 points) Déterminer le polynôme interpolateur de f, noté p, pour ces trois points.
2. (1 point) Calculer l'intégrale de p sur l'intervalle $[-1, 1]$.
3. (1 point) En déduire une formule de quadrature simple pour f sur l'intervalle $[-1, 1]$.
4. (1 point) Si $f(x) = x^2 - 1$, calculer l'erreur entre l'intégrale de f sur $[-1, 1]$ et la formule de quadrature obtenue à la question précédente. Commenter le résultat obtenu.