# CC1 : interpolation, approximation et méthode de quadrature

**Durée du contrôle : 2 heures**

*Les calculatrices ne sont pas autorisées.*
*Les réponses aux questions devront êtres justifiées.*
*La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.*

**Exercice 1. (5 points)**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (2 points) Déterminer, dans la base de Newton, le polynôme $p \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ tel que
$$p(1) = p(6) = 1, \quad p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0.$$
2. (1 point) Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points $\{(-2,4),(0,0),(1,0),(2,4)\}$ ?
$$p_1(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{8}{3}x, \quad p_2(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}, \quad p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}x.$$
3. (2 points) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, le polynôme de meilleure approximation de degré 1 pour les points $\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,7)\}$.

**Exercice 2. (5 points)**

Soit $f$ une fonction intégrable sur tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

1. (2 points) Construire la méthode de Newton-Cotes simple à 3 points sur l'intervalle $[-1,1]$.
2. (1 point) Montrer que cette méthode est d'ordre 3.
3. (1 point) En déduire une méthode de quadrature simple sur un intervalle $[a,b]$ quelconque.
4. (1 point) En déduire une méthode de quadrature composée sur un intervalle $[a,b]$ quelconque, en considérant $N > 0$ sous-intervalles de même taille.

**Exercice 3. (11 points)**

Soit $f \in C^4([0,1];\mathbb{R})$.

1. (1 point) Déterminer l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que
$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1).$$
2. (1 point) Construire une formule de quadrature simple pour l'intégrale
$$\int_0^1 f(x)dx,$$
en approchant $f$ par $p$ sur l'intervalle $[0,1]$.
3. (2 points) En déduire une formule de quadrature simple et une formule de quadrature composée, sur un intervalle $[a,b]$ quelconque, en considérant $N > 0$ sous-intervalles de taille $h > 0$.

4. Soit $x \in [0,1]$, nous cherchons à montrer qu'il existe un réel $y_x \in ]0,1[$ tel que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(y_x)}{4!} x^2 (x-1)^2.$$

   (a) (0.5 point) Montrer que cette égalité est vraie si $x \in \{0,1\}$.

   (b) (0.5 point) Si $x \notin \{0,1\}$, définissons, pour tout $t \in [0,1]$, la fonction

$$w(t) = f(t) - p(t) - (f(x) - p(x)) \frac{t^2(t-1)^2}{x^2(x-1)^2}.$$

   Montrer que la fonction $w$ s'annule en trois points distincts de $[0,1]$.

   (c) (1 point) En déduire qu'il existe $\alpha, \beta \in ]0,1[$ tels que $w'(\alpha) = w'(\beta) = 0$.

   (d) (1 point) Montrer de plus que $w'(0) = w'(1) = 0$.

   (e) (2 points) En déduire l'égalité recherchée pour tout $x \in [0,1]$.

5. (2 point) Sur un intervalle $[a,b]$ quelconque, notons $q$ le polynôme interpolateur de $f$ vérifiant

$$q(a) = f(a), \quad q'(a) = f'(a), \quad q(b) = f(b), \quad q'(b) = f'(b).$$

   En supposant qu'il existe $y_x \in ]a,b[$ telle que l'égalité

$$f(x) - q(x) = \frac{f^{(4)}(y_x)}{4!} (x-a)^2 (x-b)^2$$

   est vraie pour tout $x \in [a,b]$, déterminer une estimation de l'erreur de quadrature pour la méthode de quadrature composée construite à la question 3, en fonction de $a$, $b$ et du pas de discrétisation $h$.

---

À toute fin utile, nous rappelons les résultats suivants.

**Théorème 1 (de Rolle)** *Soient $a$ et $b$ deux réels et soit $g \in C^0([a,b];\mathbb{R})$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $g(a) = g(b)$. Alors il existe un réel $c \in ]a,b[$ vérifiant $g'(c) = 0$.*

**Théorème 2 (de Rolle "généralisé")** *Soient $a$ et $b$ deux réels et $m \in \mathbb{N}^\star$. Soit $g \in C^m([a,b];\mathbb{R})$ qui s'annule en $m+1$ points de $[a,b]$. Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $g^{(m)}(c) = 0$.*