CC1 : interpolation, approximation et méthode de quadrature

Durée du contrôle : 2 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.

Exercice 1. (6 points)
Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (2 points) En justifiant soigneusement votre réponse, donner, parmi les polynômes suivants, le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points $\{(-2,4),(0,0),(1,0),(2,4)\}$.
$$p_1(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{8}{3}x, \quad p_2(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}, \quad p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}x.$$
2. (2 points) Déterminer, dans la base de Newton, le polynôme interpolateur de Lagrange pour les points $\{(0,-1),(2,2),(3,9),(5,87)\}$.
3. (2 points) Par la méthode des moindres carrés, montrer que le polynôme de meilleure approximation de degré 2, pour les points $\{(-1,0),(0,1),(1,0),(2,-1),(3,0)\}$ est le polynôme $p(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x$.

Exercice 2. (3 points)
Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in C^1([a,b];\mathbb{R})$. On considère une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ en $N \in \mathbb{N}^\star$ sous-intervalles $([a_i,a_{i+1}])_{1\leq i\leq N}$ de sorte que $a_1 = a$ et $a_{N+1} = b$. On suppose que cette subdivision est régulière de pas $h > 0$, i.e. $a_{i+1} - a_i = h$ pour tout i.

1. (1 point) Pour $1 \leq i \leq N$, construire le polynôme interpolateur de f sur l'intervalle $[a_i,a_{i+1}]$ au point a_i, noté p_i.
2. (1 point) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, montrer que pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour tout $x \in [a_i,a_{i+1}]$,
$$|f(x) - p_i(x)| \leq \|f'\|_{\infty,[a,b]}h.$$
3. (1 point) Notons p_h la fonction définie par morceaux sur $[a,b]$ par $p_h(x) = p_i(x)$ si $x \in [a_i,a_{i+1}[$ et $p_h(b) = p_N(b)$. Montrer que p_h converge uniformément vers f lorsque h tend vers 0.

Exercice 3. (6 points)
Soit $T > 0$. Considérons l'espace vectoriel normé des fonctions T-périodiques et de carré intégrable sur une période,
$$L^2_T(\mathbb{R};\mathbb{C}) = \left\{ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}; f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^T |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$
munie du produit scalaire suivant et de sa norme associée,
$$(f,g) = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(x)}g(x)dx \quad \text{et} \quad \|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}}.$$
Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction exponentielle e_n, par
$$e_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp\left(\frac{2i\pi nx}{T}\right).$$

1. (2 points) Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2_T(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
2. (1 point) Soit $N \in \mathbb{N}$, notons E_N l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)_{-N\leq n\leq N}$. Pour $f \in L^2_T(\mathbb{R};\mathbb{C})$, justifier qu'il existe un élément $S_N \in E_N$ tel que
$$\inf_{g\in E_N} \|f-g\| = \|f - S_N\|.$$
3. (3 points) Montrer que cet élément S_N est en fait unique et s'écrit
$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} (e_n, f)e_n.$$
Remarque : Les coefficients (e_n, f) sont appelés 'coefficients de Fourier de f' et la somme S_N est appelée 'somme partielle de Fourier'.

Exercice 4. (5 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. (1 point) Sur $[-1, 1]$, construire le polynôme interpolateur de f aux points $\{-1, 0, 1\}$, noté p.
2. (2 points) Calculer $\int_{-1}^{1} p(x)dx$ et en déduire une formule de quadrature simple pour approcher l'intégrale de f sur $[-1, 1]$.
3. (1 point) Par un changement de variable à définir, en déduire une formule de quadrature simple sur tout intervalle $[a, b]$ réel.
4. (1 point) En déduire une formule de quadrature composée sur tout intervalle $[a, b]$ réel.

À toute fin utile, nous rappelons le résultat suivant.

Théorème 1 (Taylor avec reste intégrale) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}, $n \in \mathbb{N}$, alors*
$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \cdot + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$