Contrôle 2 : Méthodes de quadrature

Durée du contrôle : 2 heures

Les documents de cours sont autorisés.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront prises en compte dans la note finale.

Exercice 1. Questions de cours. (4 points)
Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Donner la définition de l'ordre d'une méthode de quadrature.
2. Quel est l'ordre de la formule de quadrature de Simpson ?
3. Quel est l'ordre d'une méthode de quadrature de Gauss simple à 4 points ?
4. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Montrer que la formule du point milieu sur l'intervalle de référence $[-1,1]$ s'écrit
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \sim 2f(0).$$

Exercice 2. Erreur de quadrature. (3 points)
Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $(a_i)_{0\leq i\leq N}$ une subdivision régulière de $[a,b]$. Notons $h = \frac{b-a}{N}$ le pas de cette subdivision. Nous cherchons à estimer l'erreur de la méthode composée des rectangles à droite pour l'approximation de l'intégral $\int_a^b f(x)dx$, i.e. nous voulons une majoration de
$$|E(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^{N} f(a_i)\right|.$$

1. Montrer que
$$\left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^{N} f(a_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{N}\left|\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx - hf(a_i)\right|.$$
2. Montrer que, pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$,
$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx = hf(a_i) - \int_{a_{i-1}}^{a_i}\int_x^{a_i} f'(t)dtdx.$$
3. En déduire une majoration de l'erreur de quadrature $|E(f)|$ en fonction du pas h, des bornes a et b et de $M_1 = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

Exercice 3. Méthode des trapèzes corrigée. (6 points)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que
$$P(-1) = f(-1), \quad P(1) = f(1), \quad P'(-1) = f'(-1), \quad P'(1) = f'(1),$$
qui s'écrit
$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3,$$

avec

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}\left(f(1)+f(-1)\right) - \frac{1}{4}\left(f'(1)-f'(-1)\right), \\
c_1 &= \frac{3}{4}\left(f(1)-f(-1)\right) - \frac{1}{4}\left(f'(1)+f'(-1)\right), \\
c_2 &= \frac{1}{4}\left(f'(1)-f'(-1)\right), \\
c_3 &= \frac{1}{4}\left(f'(1)+f'(-1)\right) - \frac{1}{4}\left(f(1)-f(-1)\right).
\end{aligned}$$

2. Calculer l'intégrale
$$\int_{-1}^{1} P(x)dx$$
et en déduire une formule de quadrature simple $I(f)$ telle que
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \sim I(f).$$
3. Montrer que cette méthode de quadrature est exactement d'ordre 3.
4. En déduire une formule de quadrature sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Méthode de quadrature de Gauss-Laguerre. (7 points)
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. Considérons la fonction poids ω définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\omega(x) = e^{-x}$. Nous cherchons à determiner une formule de quadrature de Gauss-Laguerre pour le calcul de l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-x}dx.$$

Comme habituellement avec les méthodes de quadrature de Gauss, nous cherchons alors une formule de la forme

$$I(f) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i f(x_i)$$

où q est le nombre de points de quadrature, les (x_i) sont les points de quadrature et les (α_i) sont les coefficients associés aux points (x_i).

1. Quel nombre de points q faut il considérer pour que la méthode soit d'ordre 5 ?
2. Déterminer les points de quadrature $(x_i)_{1\le i\le q}$ pour la méthode de Gauss-Laguerre d'ordre 5.
3. Déterminer les coefficients $(\alpha_i)_{1\le i\le q}$ pour la méthode de Gauss-Laguerre d'ordre 5.