Contrôle continu 2

Durée du contrôle : 2 heure

Les documents ne sont pas autorisés à part une feuille manuscrite recto-verso.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront prises en compte dans la note finale.

Exercice 1. (6 points)
Soient $T > 0$, $L > 0$, f une fonction continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et globalement L-lipschitzienne par rapport à sa seconde variable et $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on considère une discrétisation régulière de pas $h > 0$ de $[0,T]$ à $N+1$ points, notés $(t_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$, et on construit la suite (u_n) définie par le schéma numérique suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \mu_0, \\ u_{n+1} & = & u_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n,u_n))\right). \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Le schéma (1) est-il explicite ou implicite ? Est-ce un schéma à un pas ?
2. Écrire ce schéma sous la forme $u_{n_1} = u_n + h\Phi(t_n, u_n, h)$, où Φ est une fonction à définir.
3. Montrer que le schéma est consistant et stable.
4. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2. (6 points)
Soit $T > 0$. On considère le système différentiel suivant, pour $t \in [0,T]$,

$$\left\{\begin{array}{rcll} x'(t) & = & -y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) & = & x(t), & y(0) = 0, \end{array}\right.$$

que l'on souhaite approcher numériquement.

1. Montrer que la solution de ce problème de Cauchy est $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$ (on ne demande pas de montrer l'unicité de la solution). La solution est donc une trajectoire restant sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on considère une discrétisation régulière de pas $h > 0$ de $[0,T]$ à $N+1$ points, notés $(t_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$ et on cherche une suite $((x_n, y_n))_{n\in\{0,\dots,N\}}$ qui approche la solution du problème de Cauchy. Montrer que le schéma d'Euler explicite s'écrit, pour ce problème,

$$\left\{\begin{array}{ll} x_{n+1} = x_n - hy_n, & x_0 = 1, \\ y_{n+1} = y_n + hx_n, & y_0 = 0. \end{array}\right.$$

3. Pour tout $n \in \{0,\dots,N\}$, montrer que $x_n^2 + y_n^2 = (1+h^2)^n$.
4. Que pouvez-vous en déduire concernant l'utilisation de ce schéma pour la résolution approché de ce problème de Cauchy ?

Exercice 3. (12 points)
Soient $T > 0$, $f \in \mathcal{C}^0([0,T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, et $\mu_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} u'(t) & = & f(t,u(t)), & t \in [0,T], \\ u(0) & = & \mu_0. & \end{array}\right. \tag{2}$$

fabien.vergnet@sorbonne-universite.fr

Le but de cet exercice est de construire un schéma numérique permettant d'approcher la solution de ce problème, à partir d'une formule de quadrature de Gauss-Legendre simple à 2 points.

Soit $g \in \mathcal{C}^0([-1,1];\mathbb{R})$, on rappelle qu'une formule de quadrature de Gauss-Legendre simple sur $[-1,1]$ est une formule permettant le calcul approché d'une intégrale du type

$$\int_{-1}^{1} g(x)\omega(x)dx \quad \text{avec } \omega(x) = 1 \text{ pour tout } x.$$

1. Montrer que le problème de Cauchy (2) admet une unique solution u et préciser sa régularité (i.e. à quel espace de fonctions elle appartient).
2. Soient g et h deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Rappeler la définition du produit scalaire $\langle g, h\rangle_\omega$ associé au poids ω.
3. Déterminer les polynômes unitaires p_0 (de degré 0), p_1 (de degré 1) et p_2 (de degré 2) orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire défini à la question précédente.
4. Construire la formule de quadrature de Gauss-Legendre simple à 2 points sur l'intervalle $[-1,1]$.
5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, déduire de la question précédente la formule de quadrature de Gauss-Legendre simple à 2 points sur l'intervalle $[a,b]$.
6. On cherche maintenant à approcher la solution du problème (2). Pour cela on considère une discrétisation régulière de pas $h > 0$ de $[0,T]$ en $N \in \mathbb{N}^*$ sous-intervalles $([t_n, t_{n+1}])_{n\in\{0,\dots,N-1\}}$ tels que
$$0 = t_0 < \cdots < t_N = T \quad \text{et} \quad t_{n+1} - t_n = h, \forall n \in \{0,\dots,N-1\},$$
On cherche alors une suite $(u_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$ telle que, pour tout n, u_n soit une bonne approximation de $u(t_n)$, où u est la solution du problème (2).
Soit $x \in [0,h]$, montrer que, pour tout $n \in \{0,\dots,N-1\}$,
$$u(t_n + x) = u(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+x} f(s, u(s))ds.$$
7. Déduire des deux questions précédentes que l'on peut approcher u_{n+1} par
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left(f\left(t_n + x_1, u\left(t_n + x_1\right)\right) + f\left(t_n + x_2, u\left(t_n + x_2\right)\right)\right)$$
où
$$x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}h, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}h.$$
8. Le problème de la relation précédente est que $u(t_n + x_1)$ et $u(t_n + x_2)$ sont inconnus. En appliquant de nouveau la formule prouvée à la question 6 et la méthode des rectangles à gauche, montrer que l'on obtient finalement le schéma numérique suivant
$$\begin{cases} u_0 &= \mu_0, \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n + x_1, u_n + x_1 f(t_n, u_n)) + f(t_n + x_2, u_n + x_2 f(t_n, u_n))\right). \end{cases}$$
9. **Bonus.** Sous l'hypothèse que la fonction f est aussi régulière qu'on le veut, déterminer l'ordre de consistance de la méthode.