CC2 : Schéma numérique et méthode de quadrature de Gauss

Durée du contrôle : 2 heure

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.

Exercice 1. (5 points)
Soient $T > 0$, $L > 0$, f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et globalement L-lipschitzienne par rapport à sa seconde variable et $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0, 1]$, on considère une discrétisation régulière de pas $h > 0$ de $[0, T]$ à $N + 1$ points, notés $(t_n)_{n\in\{0,...,N\}}$, et on construit la suite (u_n) définie par le schéma numérique suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_0 & = & \mu_0, \\ u_{n+1} & = & u_n + (1-\alpha)hf(t_n, u_n) + \alpha hf(t_n + \frac{h}{2\alpha}, u_n + \frac{h}{2\alpha} f(t_n, u_n)). \end{array} \right. \tag{1}$$

1. (1 point) Le schéma (1) est-il explicite ou implicite ? Est-ce un schéma à un pas ?
2. (1 point) Écrire ce schéma sous la forme $u_{n_1} = u_n + h\Phi(t_n, u_n, h)$, où Φ est une fonction à définir.
3. (1 point) Montrer que le schéma est consistant.
4. (1 point) Montrer que le schéma est stable.
5. (1 point) Le schéma est-il convergent ?

Exercice 2. (5 points)
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. Considérons la fonction poids ω définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\omega(x) = e^{-x}$. Nous cherchons à determiner une formule de quadrature de Gauss-Laguerre pour le calcul de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx.$$

Comme habituellement avec les méthodes de quadrature de Gauss, nous cherchons alors une formule de la forme

$$I(f) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i f(x_i)$$

où q est le nombre de points de quadrature, les (x_i) sont les points de quadrature et les (α_i) sont les coefficients associés aux points (x_i).

1. (1 point) Combien de points q faut-il considérer pour que la méthode soit d'ordre 5 ?
2. (2 points) Déterminer les points de quadrature $(x_i)_{1\leq i\leq q}$ pour la méthode de Gauss-Laguerre d'ordre 5.
3. (2 points) Déterminer les coefficients $(\alpha_i)_{1\leq i\leq q}$ pour la méthode de Gauss-Laguerre d'ordre 5.

Exercice 3. (10 points)
Soient $T > 0$ et $\mu_0 \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante

$$\left\{\begin{array}{rcll} y'(t) & = & \cos(t)e^{2t}(y(t) - \sin(t)) & t \in [0, T], \\ y(0) & = & \mu_0. & \end{array}\right.$$

Notons $f : (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \cos(t)e^{2t}(y(t) - \sin(t))$. On souhaite alors approcher la solution y de l'EDO ci-dessus en utilisant le schéma numérique suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} y_0 & = & \mu_0, & \\ y_{n+1} & = & y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) + \frac{h}{2}f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)), & n \geq 0 \end{array}\right.$$

où $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une discrétisation régulière de $[0, T]$ de pas $h > 0$. Le but de cet exercice est de montrer que ce schéma est convergent d'ordre 2.

1. (2 points) Montrer que f est lipschitzienne par rapport à la seconde variable et justifier que le problème admet une unique solution de classe $C^3([0, T]; \mathbb{R})$.
2. (1 point) Écrire le schéma sous la forme $y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$, où ϕ est une fonction à déterminer.
3. (1 point) Donner la définition de l'erreur de consistance η_n du schéma numérique, pour $n \geq 0$.
4. (1 point) Montrer que cette erreur de consistance vérifie, pour tout $n \geq 0$, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} |\eta_n| \quad \leq \quad & \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt - \frac{h}{2}(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))) \right| \\ & + \frac{h}{2} \left| f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))) \right| \end{aligned} \tag{2}$$

5. (1 point) Montrer que le premier terme à droite de l'inégalité (2) peut être majoré par

$$\frac{\|y^{(3)}\|_{\infty,[0,T]}}{12} h^3.$$

6. (1 point) Montrer que le deuxième terme à droite de l'inégalité (2) peut-être majoré par

$$C\|y''\|_{\infty,[0,T]}h^3,$$

   où C est une constante à déterminer.
7. (1 point) Déduire des questions précédentes que le schéma est consistant d'ordre 2.
8. (2 points) Le schéma est-il convergent ? Si oui, quel est l'ordre de convergence ?

Indication pour l'exercice : On pourra utiliser les résultats du cours (chapitre 2) suivants : pour le calcul de l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t)dt$ *d'une fonction de classe* C^2 *sur l'intervalle* $[t_n, t_{n+1}]$ *de taille* h*,*

- *l'erreur de quadrature de la méthode des rectangles est majorée par* $\frac{\|g'\|_\infty}{2}h^2$*,*
- *l'erreur de quadrature de la méthode des trapèzes est majorée par* $\frac{\|g''\|_\infty}{12}h^3$*.*