CC2 : Méthode de quadrature et schémas numériques pour les EDO

Durée du contrôle : 2 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.

Exercice 1. (7 points)

Soit I un intervalle réel. Nous considérons le produit scalaire $\langle f, g\rangle_I = \int_I f(x)g(x)\mathrm{dx}$ pour toute fonction $f, g \in L^2(I;\mathbb{R})$.

1. (2 points) Déterminer, par le calcul, la famille des trois polynômes de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ qui sont unitaires, de degrés échelonnés et orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire défini sur l'intervalle $I = [-1, 1]$.
2. (2 points) En déduire une formule de quadrature de Gauss simple à deux points sur l'intervalle $[-1, 1]$ pour une fonction f intégrable sur $[-1, 1]$.
3. (1 point) Soit $[a, b]$ un intervalle réel quelconque et f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Déduire de la question précédente une formule de quadrature de Gauss simple à deux points sur l'intervalle $[a, b]$.
4. (1 point) Soit $[a, b]$ un intervalle réel subdivisé en $N \in \mathbb{N}^*$ sous-intervalles $([a_i, a_{i+1}])_{i\in\{0,\dots,N\}}$ de taille $h = \frac{b-a}{N}$ tels que $a_0 = a$ et $a_N = b$. À partir de la formule de quadrature simple obtenue à la question précédente, construire une formule de quadrature de Gauss composée à 2 points pour une fonction f intégrable sur $[a, b]$.
5. (1 point) Considérons la fonction $f(x) = \cos(x)$. Déterminer une condition suffisante sur le pas de discrétisation h pour que l'erreur de quadrature soit inférieur ou égale à 10^{-6}. *Indication : On rappelle l'estimation de l'erreur de quadrature pour une formule de quadrature simple d'ordre p, notée $I(f)$:*
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{dx} - I(f)\right| \le 2\frac{\|f^{(p+1)}\|_{\infty,[a,b]}}{(p+1)!}(b-a)^{p+2}.$$

Exercice 2. (13 points)

Soient $T > 0$ et $f \in C^2([0, T] \times \mathbb{R};\mathbb{R})$, une fonction globalement L-lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Dans cet exercice nous nous intéressons à la résolution approchée de l'EDO

$$\begin{cases} u'(t) &= f(t, u(t)), \\ u(0) &= u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Considérons les tableaux de Butcher suivants

a) $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ c) $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$

d) $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ e) $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 0 \\ \hline & 1/3 & 2/3 \end{array}$ f) $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$

1. (2 points) Parmi les tableaux ci-dessus, déterminer, en le justifiant, lesquels correspondent aux schémas d'Euler explicite, d'Euler implicite, du point milieu et de Cranck-Nicholson.
2. (2 points) Pour le reste de l'exercice, nous considérons le tableau e). Déterminer le schéma numérique associé à ce tableau. Pour cela, on introduira une discrétisation $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'intervalle $[0,T]$, de pas constant $h>0$. Le schéma est-il explicite ou implicite ? Est-il à un pas ou multi-pas ?
3. (1 point) Montrer que ce schéma est stable.
4. (1 point) En utilisant une propriété du cours, montrer que le schéma est consistant, sans étudier son ordre de consistance.
5. (1 point) Nous souhaitons maintenant montrer que le schéma converge à l'ordre 2. Donner une condition suffisante sur l'erreur de consistance d'un schéma numérique pour qu'il soit consistant d'ordre 2.
6. (1 point) Montrer que l'erreur de consistance pour le schéma précédent vérifie, pour $n\geq 0$,

$$\begin{aligned}|\eta_n| \leq\ & \left|u(t_{n+1}) - u(t_n) - \frac{h}{3}f(t_n, u(t_n)) - \frac{2h}{3}f(t_n + \frac{3h}{4}, u(t_n + \frac{3h}{4}))\right| \\ & + \left|\frac{2h}{3}f(t_n + \frac{3h}{4}, u(t_n + \frac{3h}{4})) - \frac{2h}{3}f(t_n + \frac{3h}{4}, u(t_n) + \frac{3h}{4}f(t_n, u(t_n)))\right|.\end{aligned}$$

7. (2 points) En utilisant l'EDO (1) et des développements de Taylor appropriés, montrer que le premier terme dans le membre de droite de l'inégalité précédente est majoré par C_1h^3 où $C_1>0$ est une constante indépendante de h (mais qui dépend de $u^{(3)}$) à déterminer. *Indication : on utilisera la formule de Taylor de sorte à n'avoir que des termes $u(t_n)$, $u'(t_n)$, $u''(t_n)$ et $u^{(3)}(t_n)$. On justifiera également que $u^{(3)}$ est bien définie.*
8. (2 points) De même, en utilisant la formule de Taylor et les propriétés de f, montrer que le second terme est majoré par C_2h^3, où $C_2>0$ est une constante indépendante de h à déterminer.
9. (1 point) Conclure sur la convergence du schéma numérique étudié.