CC2 : Méthodes de quadrature et schémas numériques pour les EDO

Durée du contrôle : 2 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Les réponses aux questions devront êtres justifiées.
La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.

Exercice 1. (8 points)
Soit k un entier relatif non nul. Nous considérons la fonction poids ω définie sur $[-\pi,\pi]$ par $\omega(x) = \sin^2(kx)$ ainsi que le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\omega(x)dx$, pour toutes fonctions f et g continues sur $[-\pi,\pi]$.

1. (2 points) On rappelle que $\sin(kx) = \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)$. Montrer que
$$\int_{-\pi}^{\pi}\omega(x)dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi}x\omega(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}x^3\omega(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi}x^2\omega(x)dx = \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2k^2}.$$
2. (1 point) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On souhaite construire une formule de quadrature de Gauss d'ordre 3 pour approcher l'intégrale
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin^2(kx)dx.$$
On note q le nombre de points de quadrature de cette méthode. Que vaut q ?
3. (1 point) Soit $\xi = \sqrt{\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2k^2}}$. Montrer que les points de quadrature de la méthode que l'on cherche à construire, notés $(\xi_i)_{1\leq i\leq q}$, dépendent de ξ.
4. (1 point) Montrer que les poids de la méthode sont tous égaux à $\frac{\pi}{2}$.
5. (1 point) Vers quelles valeurs tendent les points de quadrature lorsque $k \to \infty$? Quelle méthode de quadrature retrouve-t-on à la limite ?

Exercice 2. (13 points)
Soient $T > 0$ et $f \in C^3([0,T]\times\mathbb{R};\mathbb{R})$, une fonction globalement L-lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Dans cet exercice nous nous intéressons à la résolution approchée de l'EDO

$$\begin{cases} u'(t) &= f(t,u(t)), \\ u(0) &= u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Considérons le tableau de Butcher suivant.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

1. (1 point) Introduisons une discrétisation $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'intervalle $[0,T]$, de pas constant $h > 0$. Montrer que le schéma numérique associé à ce tableau de Butcher s'écrit
$$u_0 \in \mathbb{R},$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}f(t_n,u_n) + \frac{3h}{4}f\Big(t_n + \frac{2h}{3}, u_n + \frac{2h}{3}f\big(t_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}f(t_n,u_n)\big)\Big).$$

2. (1 point) Le schéma est-il explicite ou implicite ? Est-il à un pas ou multi-pas ?
3. (1 point) Montrer que ce schéma est stable.
4. (1 point) En utilisant une propriété du cours, montrer que le schéma est consistant, sans étudier son ordre de consistance.
5. (1 point) Nous souhaitons maintenant montrer que le schéma converge à l'ordre 3. Donner une condition suffisante sur l'erreur de consistance d'un schéma numérique pour qu'il soit consistant d'ordre 3.
6. (1 point) En utilisant l'EDO (1), montrer que l'erreur de consistance pour le schéma précédent vérifie, pour $n \geq 0$,
$$\eta_n \leq \eta_n^1 + \eta_n^2,$$
avec
$$\begin{aligned} \eta_n^1 &= \left| u(t_{n+1}) - u(t_n) - \frac{h}{4}u'(t_n) - \frac{3h}{4}u'(t_n + \frac{2h}{3}) \right|, \\ \eta_n^2 &= \frac{3h}{4} \left| f(t_n + \frac{2h}{3}, u(t_n + \frac{2h}{3})) - f\Big(t_n + \frac{2h}{3}, u(t_n) + \frac{2h}{3} f\big(t_n + \frac{h}{3}, u(t_n) + \frac{h}{3} f(t_n, u(t_n))\big)\Big) \right|. \end{aligned}$$
7. (1 point) De même, en utilisant l'EDO (1) et les propriétés de f montrer que, pour $n \geq 0$,
$$\eta_n^2 \leq \eta_n^3 + \eta_n^4,$$
où
$$\begin{aligned} \eta_n^3 &= \frac{3Lh}{4} \left| u(t_n + \frac{2h}{3}) - u(t_n) - \frac{2h}{3}u'(t_n + \frac{h}{3}) \right|, \\ \eta_n^4 &= \frac{Lh^2}{2} \left| f(t_n + \frac{h}{3}, u(t_n + \frac{h}{3})) - f\big(t_n + \frac{h}{3}, u(t_n) + \frac{h}{3} f(t_n, u(t_n))\big) \right| \end{aligned}$$
8. (2 points) Justifier que la solution $u \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et écrire les développements de Taylor–Lagrange de
$$u(t_{n+1}), \quad u(t_n + \frac{h}{3}), \quad u(t_n + \frac{2h}{3}), \quad u'(t_n + \frac{h}{3}) \quad \text{et} \quad u'(t_n + \frac{2h}{3}).$$
9. (3 points) En utilisant les développements de Taylor–Lagrange et les propriétés de f, montrer qu'il existe des constantes $C_1, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ telles que
$$\eta_n^1 \leq C_1 h^4, \quad \eta_n^3 \leq C_3 h^4, \quad \text{et} \quad \eta_n^4 \leq C_4 h^4.$$
10. (1 point) Conclure sur la convergence du schéma numérique étudié.

À toute fin utile, nous rappelons le résultat suivant.

Théorème 1 (Formule de Taylor–Lagrange) *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Pour tout $x, h \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que*
$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \varepsilon h).$$