

CC2 : Méthodes de quadrature et schémas numériques pour les EDO

Durée du contrôle : 1h30

*Les calculatrices ne sont pas autorisées.**Les réponses aux questions devront être justifiées.**La qualité de la rédaction et la propreté de la copie seront grandement appréciées.***Exercice 1. (2 points)**

En mécanique des structures, les déplacements $x(t)$ d'un oscillateur amorti par un amortissement à mémoire sont donnés par la résolution de l'EDO suivante

$$x''(t) + kx(t) + \int_0^t G(s)x'(s)ds = 0, \quad (1)$$

où k est une constante réelle et $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction de mémoire.

- (1 point) Transformer l'équation (1) pour obtenir un système d'EDO d'ordre 1, dont l'inconnue est une fonction $X : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^3$.
- (1 point) Appliquer le schéma d'Euler explicite pour le système différentiel sur X et en déduire un schéma numérique pour approcher la solution de (1).

Exercice 2. (6 points)

Nous considérons la fonction poids ω définie sur $[-1, 1]$ par $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ ainsi que le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\omega(x)dx$, pour toutes fonctions f et g continues sur $[-1, 1]$.

- (2 points) Montrer que

$$\int_{-1}^1 \omega(x)dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-1}^1 x\omega(x)dx = \int_{-1}^1 x^3\omega(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 x^2\omega(x)dx = \frac{\pi}{8}.$$

- (1 point) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. On souhaite construire une formule de quadrature de Gauss d'ordre 3 pour approcher l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sqrt{1-x^2}dx.$$

On note q le nombre de points de quadrature de cette méthode. Que vaut q ?

- (3 points) Déterminer une méthode de quadrature de Gauss d'ordre 3 pour approcher l'intégrale ci-dessus.

Exercice 3. (12 points)

Soient $T > 0$ et $\mu_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant,

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(t) \exp(-u^2(t)) & \forall t \in [0, T], \\ u(0) = \mu_0. \end{cases} \quad (2)$$

Notons $f : (t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \cos(t) \exp(-u^2) \in \mathbb{R}$ et considérons le tableau de Butcher suivant,

0	0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

1. (1 point) Étudier la régularité de f et montrer qu'elle est globalement L -lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, où $L > 0$ est une constante à déterminer.
2. (1 point) Montrer que le problème de Cauchy admet une unique solution, dont on précisera la régularité.
3. (1 point) Introduisons une discrétisation $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'intervalle $[0, T]$, de pas constant $h > 0$. Montrer que le schéma numérique associé au tableau de Butcher ci-dessus s'écrit

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}f(t_n, u_n) + \frac{3h}{4}f\left(t_n + \frac{2h}{3}, u_n + \frac{2h}{3}f(t_n, u_n)\right). \end{cases}$$

4. (1 point) Le schéma est-il explicite ou implicite ? Est-il à un pas ou multi-pas ?
5. (1 point) Montrer que ce schéma est stable.
6. (1 point) En utilisant une propriété du cours, justifier que le schéma est consistant, sans étudier son ordre de consistance.
7. (1 point) Nous souhaitons maintenant montrer que le schéma converge à l'ordre 2. Donner une condition suffisante sur l'erreur de consistance d'un schéma numérique pour qu'il soit consistant d'ordre 2.
8. (1 point) En utilisant l'EDO (2) et les propriétés de f , montrer que l'erreur de consistance pour le schéma précédent vérifie, pour $n \geq 0$,

$$\eta_n \leq \eta_n^1 + \eta_n^2,$$

avec

$$\begin{aligned} \eta_n^1 &= \left| u(t_{n+1}) - u(t_n) - \frac{h}{4}u'(t_n) - \frac{3h}{4}u'\left(t_n + \frac{2h}{3}\right) \right| \quad \text{et} \\ \eta_n^2 &= \frac{3Lh}{4} \left| u\left(t_n + \frac{2h}{3}\right) - u(t_n) - \frac{2h}{3}u'(t_n) \right|. \end{aligned}$$

9. (3 points) En utilisant des développements de Taylor–Lagrange, montrer qu'il existe des constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ telles que

$$\eta_n^1 \leq C_1 h^\alpha, \quad \text{et} \quad \eta_n^2 \leq C_2 h^\alpha.$$

10. (1 point) Conclure sur la convergence du schéma numérique étudié.

À toute fin utile, nous rappelons les résultats suivants.

Théorème 1 (Exponentielle complexe) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Théorème 2 (Formule de Taylor–Lagrange) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Pour tout $x, h \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \varepsilon h).$$