TD1 : Interpolation polynômiale

Exercice 1.
Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange p_2 de la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ aux points $0, 1, 2$.

Exercice 2.
Soit $f(x) = \sqrt{1 + 10x}$, définie pout tout $x \in \ [-\frac{1}{10}, +\infty[$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange p_2 de f aux points 0, $\frac{1}{2}$ et 1.
2. Calculer $p_2(0.1)$ et $p_2(0.9)$ et comparer aux valeurs exactes.
3. Evaluer un majorant de l'erreur $|E(x)| = |f(x) - p_2(x)|$ à partir d'un résultat du cours, pour ces valeurs $x = 0.1$ et 0.9.

Exercice 3.
Soient $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ $n + 1$ réels distincts et $(y_i)_{0\leq i\leq n}$ $n + 1$ réels. On cherche un polynôme p_n vérifiant $p_n(x_i) = y_i$ en déterminant ses coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{P}_n$, c'est-à-dire en l'écrivant

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j.$$

1. Montrer que le vecteur $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_n)^t$ est solution d'un système linéaire $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$, où $\mathbf{y}$ est le vecteur $(y_0, \ldots, y_n)^t$ et $V \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
2. Justifier que la matrice V est inversible.
3. Pourquoi selon vous cette approche n'est-elle pas utilisée en pratique pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange ?

Exercice 4.
Soit $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ $n{+}1$ réels distincts, $(y_i)_{0\leq i\leq n}$ $n{+}1$ réels. On cherche un polynôme p_n vérifiant $p_n(x_i) = y_i$ en déterminant ses coordonnées $(d_i)_{0\leq i\leq n}$ dans la base $\mathcal{B} = \{N_j, 0 \leq j \leq n\}$ de $\mathcal{P}_n$, où

$$N_0(x) = 1, \qquad N_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1}(x - x_k) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n$$

1. Justifier que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que le vecteur $\mathbf{d} = (d_0, \ldots, d_n)^t$ est solution d'un système linéaire $T\mathbf{d} = \mathbf{y}$, où $\mathbf{y}$ est le vecteur $(y_0, \ldots, y_n)^t$ et $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
3. Justifier que la matrice T est inversible.
4. Pourquoi cette approche est-elle plus intéressante pour calculer les coefficents $(d_i)_{0\leq i\leq n}$ que l'approche de l'exercice 3 ?

Exercice 5.
Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à 4 vérifiant

$$P(-1) = 1, \quad P'(-1) = -1, \quad P(0) = 0, \quad P(1) = 1, \quad P'(1) = 1.$$

Représenter graphiquement ce polynôme.

Exercice 6.
Soient x_0, x_1, ..., x_n des réels distincts d'un intervalle $[a, b]$. Pour $i = 0, \ldots, n$, on pose

$$l_i(x) = \prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}, \qquad h_i(x) = \left[1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i)\right] l_i^2(x), \qquad k_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$$

On considère $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable, et on introduit le polynôme

$$p = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)h_i + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)k_i.$$

1. Quels sont les degrés des polynômes h_i et k_i ? Que peut-on dire du degré de p ?
2. Montrer que, pour tout couple $\{i, j\} \in \{0, \ldots, n\}^2$
$$\begin{matrix} h_i(x_j) = \delta_{i,j}, & k_i(x_j) = 0 \\ h_i'(x_j) = 0, & k_i'(x_j) = \delta_{i,j} \end{matrix} \qquad \text{où} \qquad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}.$$
3. Montrer que p est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $2n + 1$ tel que
$$p(x_j) = f(x_j) \quad \text{et } p'(x_j) = f'(x_j) \qquad \text{pour tout } j \in \{0, \ldots, n\}.$$
4. On prend dans cette question $n = 1$, et on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$. Pour $x \in [a, b]$ on note $E_H(x) = |f(x) - p(x)|$. On pose
$$\phi(t) = f(t) - p(t) - \mu_x(t - x_0)^2(t - x_1)^2$$
   (a) Que représente E_H ? Que valent $E_H(x_0)$ et $E_H(x_1)$?
   (b) Soit $x \notin \{x_0, x_1\}$. Montrer que l'on peut chosisir μ_x pour que la fonction ϕ s'annule en 3 points distincts de $[a, b]$.
   (c) Avec ce choix de μ_x, montrer que ϕ' s'annule en 4 points distincts de $[a, b]$.
   (d) En déduire qu'il existe $\xi_x \in]a, b[$ tel que $\phi^{(4)}(\xi_x) = 0$.
   (e) En déduire une expression de $E_H(x)$.

Exercice 7. Des polynômes de Lagrange aux polynômes d'Hermite...

Soit $\epsilon \in]0, 1[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur [0,1]. On note $a = f(0)$, $b = f(1)$ et $M = \sup_{x\in]0,1[} |f'''(x)|$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points $0, \epsilon$ et 1.
2. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que, pour chaque $x \in [0, 1]$,
$$\lim_{\epsilon\to 0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 f'(0)x + a.$$
3. Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :
$$P(0) = a, \qquad P'(0) = f'(0), \qquad P(1) = b.$$
   Ce polynôme est appelé *polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f relativement aux points 0, 1, et aux entiers 1, 0*, ce qui signifie qu'on approche f à l'ordre 1 au point 0 et à l'ordre 0 au point 1.