TD2 : Polynôme de meilleure approximation

Exercice 1.

1. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, le polynôme de meilleure approximation de degré 1 pour les points $\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,7)\}$.
2. Toujours à l'aide de la méthode des moindres carrés, déterminer le polynôme de meilleure approximation de degré deux pour la fonction $f : x \in [-1,1] \mapsto x^4$, évaluée aux points $\{-1,0,1\}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 2. Polynômes de Bernstein.

L'objectif de cet exercice est de démontrer une version légèrement simplifiée du Théorème de Weierstrass vu en cours, que l'on énonce ici :

Théorème. *Si f est une fonction continue à valeurs réelles sur l'intervalle $[0,1]$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{g\in\mathcal{P}_n(\mathbb{R})} \|f-g\|_\infty = 0.$$

On cherche donc à approcher une fonction continue f par un polynôme sur l'intervalle $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $0 \leq j \leq n$, on définit les polynômes de Bernstein par :

$$B_j^n(x) = \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$B_j^n(x) \geq 0, \quad \sum_{j=0}^n B_j^n(x) = 1, \quad \sum_{j=0}^n j B_j^n(x) = nx, \quad \sum_{j=0}^n j(j-1) B_j^n(x) = n(n-1)x^2.$$

2. En déduire l'égalité suivante pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{j=0}^n (j-nx)^2 B_j^n(x) = nx(1-x).$$

3. Soit $f \in C([0,1])$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f\left(\frac{j}{n}\right) B_j^n(x).$$

   Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sum_{j=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right| B_j(x).$$

4. On rappelle que si f est une fonction continue sur $[0,1]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |y-x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer un ensemble $A \subset \{0, \ldots, n\}$ tel que

$$\sum_{j \in A} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j^n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) On note B le complémentaire de A dans $\{0, \ldots, n\}$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{j \in B} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j^n(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

(c) En déduire que $|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ et montrer que la suite (P_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

5. Utiliser les questions précédentes pour démontrer le Théorème donné dans l'énoncé de l'exercice.

Exercice 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé contenant $\mathcal{P}_n$. Montrer que pour tout $f \in E$ il existe $p_n \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$\|f - p_n\| = \min \{\|f - q\|, \quad q \in \mathcal{P}_n\}.$$

Un tel polynôme est appelé polynôme de meilleur approximation (PMA) de f dans $\mathcal{P}_n$ pour la norme $\|\cdot\|$.

2. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Quels sont les PMA de f dans $\mathcal{P}_1$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty(]-1,1[)}$? Qu'en déduire concernant l'unicité du PMA en général ?

3. On suppose maintenant que E est un espace muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$.

(a) Montrer si p_n est un PMA de f sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_n$ alors

$$\langle f - p_n, q \rangle = 0 \qquad \forall q \in \mathcal{P}_n.$$

(b) En déduire que le PMA de f est alors unique .

*R*emarque : c'est le projeté orthogonal de f sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_n$!