TD3 : Méthodes de quadrature et polynômes orthogonaux

1 Méthodes de quadrature de Newton-Cotes et avatars

Exercice 1.
Soient $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On cherche à estimer l'erreur de la méthode des rectangles à gauche pour le calcul de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx.$$

On considère une subdivision régulière de $[a,b]$, $(a_i)_{1\leq i\leq N+1}$, et on note $h=\frac{b-a}{N}$ le pas de cette subdivision.

1. Montrer que
$$\left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^N f(a_i)\right| \leq \sum_{i=1}^N \left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - hf(a_i)\right|.$$
2. Montrer que
$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = (a_{i+1}-a_i)f(a_i) + \int_{a_i}^{a_{i+1}}\int_{a_i}^{x} f'(t)dtdx.$$
3. Montrer que
$$\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\int_{a_i}^{x} f'(t)dtdx\right| \leq \sup_{t\in[a,b]}|f'(t)|\frac{h^2}{2}.$$
4. En déduire une estimation de l'erreur de la méthode $|E(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^N f(a_i)\right|$ en fonction de h, a, b et de $M_1 = \sup_{t\in[a,b]}|f'(t)|$.

Exercice 2.
Soient $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On cherche à estimer l'erreur de la méthode du point milieu pour le calcul de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx.$$

On considère une subdivision régulière de $[a,b]$, $(a_i)_{1\leq i\leq N+1}$, et on note $h=\frac{b-a}{N}$ le pas de cette subdivision.

1. Montrer la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral : pour tout $\alpha\in[a,b]$, et tout $x\in[a,b]$,
$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \int_\alpha^x (x-t)f''(t)dt.$$
2. Montrer que
$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} (x-a_{i,1/2})dx = 0, \quad \forall i\in 1,\dots,N, \quad \text{où} \quad a_{i,1/2} = \frac{a_i+a_{i+1}}{2}.$$

3. En déduire une estimation de l'erreur

$$|E(f)| = \left| \int_a^b f(x)dx - h \sum_{i=1}^{N} f(a_{i,1/2}) \right|$$

en fonction de h et de $M_2 = \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)|$.

Exercice 3.
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$. On considère la formule de quadrature élémentaire :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \sim w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f'(\xi)$$

où $\xi \in]0,1]$ et w_1, w_2, w_3 sont des réels. On pose

$$E(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \left[w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f'(\xi)\right].$$

1. Déterminer les paramètres ξ, w_1, w_2, w_3 pour que la formule de quadrature soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
2. Les paramètres ξ, w_1, w_2, w_3 étant ainsi fixés, calculer $E\left(x \mapsto x^4\right)$ et en déduire l'ordre de la méthode.
3. À l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle $[a,b]$.

2 Polynômes orthogonaux

Exercice 4. Polynômes de Legendre
On se place dans $]a,b[=]-1,1[$ et on considère le poids $\omega(x)=1$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ les polynômes de Legendre par

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \frac{(x^2-1)^n}{n!}$. Montrer que pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$,

$$U^{(k)}(-1) = U^{(k)}(1) = 0.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^n([-1,1])$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que

$$\int_{-1}^{1} f(x) L_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x) U_n(x) dx.$$

3. Démontrer que pour tout polynôme $p \in \mathcal{P}^{n-1}$

$$\int_{-1}^{1} p(x) L_n(x) dx = 0$$

et en déduire que la famille $\{L_0,\dots,L_n\}$ est orthogonale.

4. Déterminer alors l'unique suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unitaires définis sur $[-1,1]$, orthogonaux deux-à-deux pour le produit scalaire associé à la fonction poids ω et tels que $\deg(p_n) = n$.

Exercice 5. Polynômes de Tchebychev
Pour $n \geq 0$ on définit la fonction t_n sur l'intervalle $[-1, 1]$ par

$$\cos(nt) = t_n(\cos(t)), \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer les expressions de t_0, t_1, t_2.
2. Montrer que la suite de fonctions $(t_n)_{n\geq 2}$ vérifie la relation de récurrence

$$t_{n+1} = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x).$$

3. En déduire que, pour $n \geq 1$, les fonctions t_n sont des polynômes de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
4. Montrer alors que la suite $(\mathbf{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathbf{p}_0 = 1$ et $\mathbf{p}_n = \frac{1}{2^{n-1}} t_n$, pour $n \geq 1$, correspond à l'unique suite de polynômes unitaires définis sur $[-1, 1]$, orthogonaux deux-à-deux pour le produit scalaire associé au poids $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et tels que $\deg(\mathbf{p}_n) = n$.

3 Méthodes de quadrature de Gauss

Exercice 6.
Déterminer le nombre de points nécessaires pour évaluer l'intégrale $\int_0^1 \cos(x^2)dx$ avec une précision de 10^{-8} par la méthode des rectangles à gauche, la méthode du point milieu et la méthode de Gauss (composée) à trois points.

Exercice 7.
Déterminer une méthode de quadrature de Gauss d'ordre au moins 5 pour approcher l'intégrale suivante

$$\int_{-1}^{1} \frac{1 + \cos(x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Exercice 8.
On considère une méthode de quadrature élémentaire sur $[-1, 1]$ définie par

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \sim I_{[-1,1]}(g) := g\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

1. Montrer que la méthode est au moins d'ordre 3. Est-elle d'ordre 3 ou 4 ?
2. On utilise cette formule de quadrature élémentaire pour construire une formule de quadrature composée sur un intervalle $[a, b]$, avec une subdivision régulière $(a_i)_{1\leq i\leq N+1}$ de $[a, b]$ de pas $h = \frac{b-a}{N-1}$. On note $a_{i,1/2} = \frac{a_i+a_{i+1}}{2}$. Montrer que l'on obtient :

$$\int_a^b g(t)dt \sim I(g) := \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N} \left[g\left(a_{i,1/2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(a_{i,1/2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) \right].$$