TD4 : Schémas numériques pour les EDO

Exercice 1.

L'évolution du nombre d'individus d'une population peut être modélisée par le modèle de Verhulst

$$y'(t) = y(t)(\alpha - \beta y(t)), \quad y(0) = y_{\text{init}} \in \mathbb{R}_+,$$

où α et β sont des constantes strictement positives.

1. Quelle est la fonction f telle que cette EDO puisse s'écrire sous la forme $y'(t) = f(t, y(t))$? Montrer que f n'est pas globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.
2. Déterminer la solution y de ce problème de Cauchy en fonction de α , β et y_{init}. Que vaut $\lim_{t\to\infty} y(t)$?
3. Écrire le schéma d'Euler explicite (avec un pas constant $h > 0$) pour approcher la solution exacte sur un intervalle $[0, T]$.
4. Pour quelles valeurs de h ce schéma préserve-t-il la positivité de la solution y ?

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) &= -\dfrac{1}{\epsilon} y(t) + \dfrac{1}{\epsilon}\cos(t), \quad t \in [0, T], \\ y(0) &= y_{\text{init}} \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où ϵ est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer que l'unique solution de (1) est

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{1}{1+\epsilon^2}\right) e^{-t/\epsilon} + \frac{1}{1+\epsilon^2}\left(\cos(t) + \epsilon \sin(t)\right).$$

2. Écrire le schéma d'Euler explicite (avec un pas constant $h > 0$) pour approcher la solution de (1) sur l'intervalle $[0, T]$.
3. Même question avec le schéma d'Euler implicite.

Exercice 3.

On considère le système proies-prédateurs suivant

$$\begin{cases} x'(t) = & ax(t) - bx(t)y(t), \qquad x(0) = & x_{\text{init}} \in \mathbb{R}, \\ y'(t) = & -cy(t) + dx(t)y(t), \qquad y(0) = & y_{\text{init}} \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles positives et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est la condition initiale du système.

Écrire le schéma d'Euler explicite à pas constant h afin d'approcher la solution du système différentiel (2) sur un intervalle $[0, T]$.

Exercice 4.

Lorsque l'angle θ entre un pendule attaché à une tige de longueur l soumis à son poids et la verticale est petit (θ proche de 0), l'équation d'évolution de θ est donnée par

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0.$$

Mettre sous forme d'un système différentiel d'ordre 1 l'équation différentielle du second ordre ci-dessus et écrire les schémas d'Euler explicite et Euler implicite pour approcher sa solution.

Exercice 5.

On s'intéresse à une culture de micro-organismes dans un milieu fermé, comme un fermenteur. On fait l'hypothèse simplificatrice que le fermenteur ne contient qu'une seule espèce de micro-organisme. Cette espèce se reproduit avec un taux de naissance $a > 0$. Comme le milieu est fermé, elle va se trouver en compétition avec elle-même, avec un coefficient de compétition interne $b > 0$, supposé constant. Par ailleurs, on suppose que la production de biogaz par les micro-organismes a un effet toxique sur ceux-ci. Cette production est cumulative et proportionnelle à la quantité de micro-organismes présents dans le fermenteur à tout instant. Le modèle décrivant l'évolution de la quantité $q(t)$ de micro-organisme à l'instant t à partir d'une quantité initiale q_0 est

$$q'(t) = aq(t) - bq(t)^2 - cq(t)\int_0^t q(s)ds, \quad q(0) = q_0 > 0. \tag{3}$$

1. Transformer l'équation pour obtenir un problème de Cauchy dont l'inconnue est une fonction $y : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$. Pour cela on introduira $z(t) = \int_0^t q(s)ds$.
2. Appliquer le schéma d'Euler explicite pour l'équation en y et en déduire un schéma numérique pour approcher la solution de (3).

Exercice 6.

On considère le système différentielle dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2(x(t) - ty(t)), \\ y'(t) & = & 2y(t), \end{array} \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

1. Écrire ce système sous la forme d'un problème de Cauchy.
2. Déterminer la solution qui passe par le point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en $t = 0$.
3. Soient $T > 0$ et $N \in \mathbb{N}^\star$. On divise l'intervalle $[0, T]$ et N sous-intervalles de longueur $h = T/N$ et on pose $t_n = nh$ pour $0 \leq n \leq N$. On note (x_n, y_n) l'approximation de la solution exacte du système au temps t_n donnée par le schéma d'Euler explicite. Écrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n).
4. Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0 et y_0.
5. Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée converge sur R^+ vers la solution du système lorsque $h \to 0$.