

Outils mathématiques et numériques pour les matériaux

Par Fabien Vergnet
`fabien.vergnet@sorbonne-universite.fr`

Il est important de douter et que le doute ne soit pas une chose effrayante, mais une chose de grande valeur.

RICHARD P. FEYNMAN

Table des matières

1	Prérequis : nombres complexes, trigonométrie et fonctions usuelles	1
1.1	Les nombres complexes	1
1.2	Polynômes à coefficients complexes	2
1.3	Rappel de trigonométrie	3
1.4	Forme trigonométrique d'un nombre complexe, application à la trigonométrie	5
1.5	Fonctions usuelles	6
1.6	Rappels sur l'intégration de fonctions réelles	12
2	Algèbre linéaire	15
2.1	Matrices et systèmes linéaires	15
2.2	Espace vectoriel	18
2.3	Applications linéaires	21
2.4	Matrice d'une application linéaire	24
2.5	Déterminant d'une matrice	27
2.6	Valeurs propres et vecteurs propres	29
3	Équations différentielles ordinaires	33
3.1	Motivation	33
3.2	Définitions	33
3.3	Équations différentielles d'ordre 1 à variables séparées	34
3.4	Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1	34
3.5	Systèmes d'EDO linéaires d'ordre 1 à coefficients constants	37
3.6	EDO linéaires scalaires d'ordre n à coefficients constants	40
3.7	Approximation numérique	41

Chapitre 1

Prérequis : nombres complexes, trigonométrie et fonctions usuelles

1.1 Les nombres complexes

Définition 1.1. Un nombre complexe z est un doublet (a, b) de $\mathbb{R}^2$, noté $z = a + ib$, qu'on identifie au point du plan d'abscisse a et d'ordonnée b . a est la partie réelle du nombre complexe $a + ib$, notée $\operatorname{Re}(z)$, et b est sa partie imaginaire, notée $\operatorname{Im}(z)$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Définition 1.2. On peut faire les opérations suivantes sur les nombres complexes :

- Additionner deux nombres complexes :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

- Multiplier un nombre complexe par un scalaire :

$$\lambda(a + ib) = \lambda a + i\lambda b \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Multiplier deux nombres complexes :

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Les calculs se font comme dans $\mathbb{R}$, avec la règle cruciale que $i^2 = -1$.

Définition 1.3. On définit le conjugué et le module d'un nombre complexe.

- Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$. Géométriquement, c'est la symétrique du point de coordonnées (a, b) par rapport à l'axe des abscisses.
- Le module de $z = a + ib$ est le nombre positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Cela correspond à la distance du point de coordonnées (a, b) à l'origine.

Proposition 1.4 (Inégalité triangulaire). *Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Démonstration. Il suffit de calculer $|z + w|^2$. □

1.2 Polynômes à coefficients complexes

1.2.1 Théorème fondamental de l'algèbre

Un polynôme de degré n à coefficient complexes est une fonction de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

avec $a_0 \in \mathbb{C}$, $a_1 \in \mathbb{C}$, ..., $a_n \in \mathbb{C}$ et de plus, a_n est non nul.

Remarque 1.5. Un polynôme à coefficients réels peut être vu comme un polynôme à coefficients complexes.

On a le théorème fondamental suivant.

Théorème 1.6. Soit P polynôme à coefficients complexes de degré n . Alors il existe $r_1, r_2, \dots, r_n$ n nombres complexes (certains peuvent être égaux) tels que

$$P(X) = a_n(X - r_1)(X - r_2) \cdots (X - r_n).$$

C'est la forme scindée du polynôme.

Remarque 1.7. Ne pas oublier le facteur a_n devant !

Remarque 1.8. Si le polynôme est à coefficient réel, les r_i sont a priori complexes. Si on cherche les r_i réels, ce n'est pas toujours possible de mettre le polynôme sous forme scindée.

1.2.2 Cas des polynômes de degré 2 à coefficients réels

On considère le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec a, b et c réels. Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif ou nul, les deux racines du polynômes sont $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Les deux racines sont confondues si le déterminant est nul. Si $\Delta < 0$, les racines sont complexes et conjuguée l'une de l'autre. Ce sont $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

1.2.3 Cas des polynômes de degré 2 à coefficients complexes

Tout fonctionne pareil quand les coefficients a, b et c sont complexes, sauf que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est un nombre complexe. Ainsi, il nous faut trouver une « racine carrée » du discriminant, c'est-à-dire un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ (notez que si δ convient, $-\delta$ convient aussi, il n'y a pas qu'une seule solution). Les racines sont ensuite donnée par les formules $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.

Remarque 1.9. On retrouve le cas des coefficients réels comme un cas particulier de celui ci, puisque si Δ est réel positif, une « racine carrée » est $\sqrt{\Delta}$, tandis que si Δ est réel négatif, une « racine carrée » est $i\sqrt{-\Delta}$.

1.2.4 Comment trouver la « racine carrée » d'un nombre complexe ?

Cherchons $z = x + iy$ tel que $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$. En identifiant partie réelle et partie imaginaire on trouve
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$
 on peut résoudre ce système mais il est plus pratique d'utiliser les relations sur les modules $|z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ qui donne $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. On trouve ainsi facilement x^2 et y^2 . On utilise la relation $2xy = b$ pour déterminer ensuite le signe de y par rapport à celui de x (c'est le même si $b \geq 0$, et l'opposé si $b < 0$).

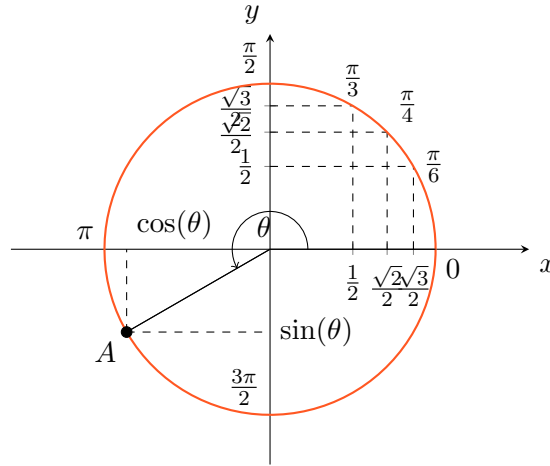


FIGURE 1.1 – Cercle trigonométrique

1.3 Rappel de trigonométrie

1.3.1 le cercle trigonométrique

On considère un cercle de rayon 1, dont le centre est l'origine d'un repère cartésien, noté O . Sur ce cercle, on considère un point A tel que l'angle orienté entre l'axe des abscisses $\vec{e}_x$ et le vecteur $\vec{OA}$ est θ (rappel : cet angle est défini à 2π près). Alors les coordonnées du point A sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ (voir Figure 1.1). Dessiner un cercle trigonométrique permet, entre autres, de déterminer les signes de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, les relations dans les triangles rectangles (« sinus = opposé / hypoténuse ») et d'obtenir la relation fondamentale $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

Grâce au cercle trigonométrique, on peut également retrouver les valeurs des cosinus et des sinus suivantes :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\pi}{2}$

On peut également utiliser le cercle trigonométrique pour retrouver les formules trigonométriques :

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(x), & \sin(-x) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x), \\ \sin(x + \pi) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi/2) &= -\sin(x), & \sin(x + \pi/2) &= \cos(x), \\ \cos(x - \pi/2) &= \sin(x), & \sin(x - \pi/2) &= -\cos(x).\end{aligned}$$

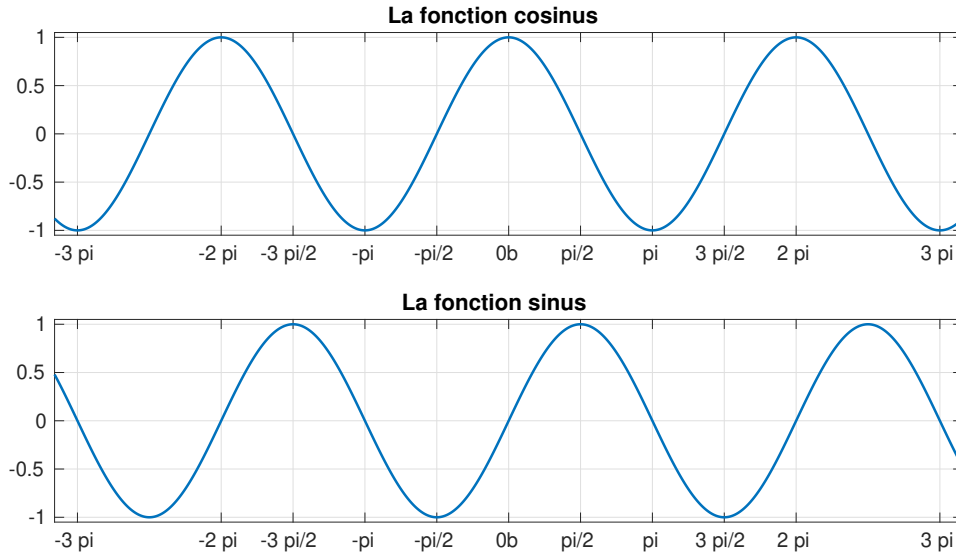
Plus généralement, on a les identités suivantes.

Proposition 1.10. Soient α et β deux angles,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta).\end{aligned}$$

1.3.2 Les fonctions $\theta \mapsto \sin(\theta)$ et $\theta \mapsto \cos(\theta)$

Ces fonctions sont représentées ci-dessous.



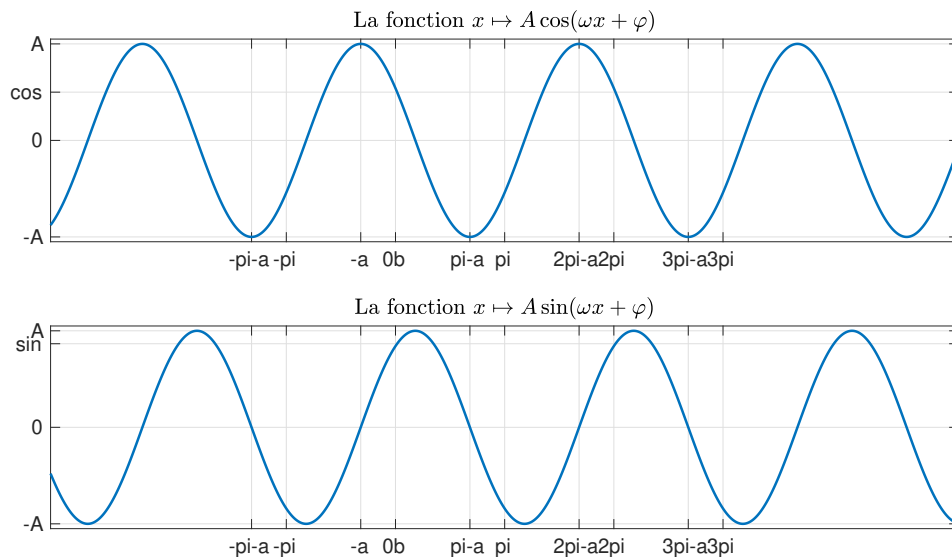
Ces fonctions sont 2π -périodiques, c'est-à-dire que pour tout x , $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Elles sont continues et dérivables, leurs dérivées sont

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

On en déduit qu'on peut les dériver autant de fois qu'on veut.

1.3.3 Les fonctions $x \mapsto A \cos(\omega x + \varphi)$ et $x \mapsto A \sin(\omega x + \varphi)$

Ces fonctions ressemblent beaucoup aux fonctions sinus et cosinus, elles sont juste étirées verticalement et horizontalement et décalée horizontalement. Elles sont représentées ci-dessous.



Quelle est le maximum et le minimum de ces fonctions ? On sait que $\cos$ et $\sin$ varient entre -1 et 1 donc ces fonctions varient entre $-A$ et A . A est appelé **l'amplitude** et cela représente à quel point le signal est grand.

Quelle est la période de ces fonctions ?

On sait que $\cos$ est 2π -périodique. Si $A \cos(\omega x + \varphi) = A \cos(\omega x' + \varphi)$, cela signifie donc que $(\omega x + \varphi) - (\omega x' + \varphi)$ est un multiple de 2π , donc que $x - x'$ est un multiple de $\frac{2\pi}{\omega}$.

Réciproquement on vérifie

$$A \cos(\omega(x + 2\pi/\omega) + \varphi) = A \cos(\omega x + 2\pi + \varphi) = A \cos(\omega x + \varphi),$$

la fonction est $\frac{2\pi}{\omega}$ -périodique. Le paramètre ω s'appelle la **pulsation** : plus ω est grand, plus le signal se répète souvent (i.e. plus souvent on repasse par le maximum, etc). On parle aussi de la **fréquence** $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

Quand la fonction $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ **s'annule t'elle ?** La fonction $\sin$ s'annule sur tout les multiples de π . Donc la fonction f s'annule en tout point x tel que, pour un certain entier k (positif ou négatif), on a $\omega x + \varphi = k\pi$, i.e. pour les $x = \frac{k\pi - \varphi}{\omega}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Notez que f ne s'annule pas en 0. Le coefficient φ , appelé **déphasage**, traduit de combien la courbe est décalée par rapport à la fonction de référence $x \mapsto A \sin(\omega x)$ (qui a même pulsation et même amplitude).

1.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe, application à la trigonométrie

1.4.1 Argument et notation exponentielle

Soit $a + ib$ un nombre complexe non nul. On peut mettre le module en facteur devant et écrire

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Le nombre complexe $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ est de module 1, ce qui signifie que le point du plan associé, de coordonnées $(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})$, est sur le cercle unité. Cela implique la définition suivante.

Définition 1.11. Soit $z = a + ib$ (forme algébrique) un nombre complexe. Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

C'est la forme trigonométrique de z . θ est **un argument** de $a + ib$ (tout les $\theta + 2k\pi$ sont également des arguments de $a + ib$), et cela représente l'angle entre l'axe des abscisses $\vec{e}_x$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (où M est le point associé à $a + ib$). Par définition on note $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ de sorte que $z = |z|e^{i\theta}$ (forme exponentielle).

Proposition 1.12. L'exponentielle complexe a les mêmes propriétés que l'exponentielle réelle :

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}, \quad e^{-i\theta} e^{i\theta} = 1, \quad (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}.$$

Démonstration. Soit $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ et $z' = \cos(\theta') + i \sin(\theta')$. Il s'agit de voir que $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

$$\begin{aligned} zz' &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\cos(\theta') + i \sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta')) + i(\cos(\theta) \sin(\theta') + \sin(\theta) \cos(\theta')) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \end{aligned}$$

□

Remarque 1.13. La forme trigonométrique est très pratique quand on multiplie les nombres complexes entre eux. Pour l'addition, il n'y a pas de formule, il vaut mieux repasser par la forme algébrique.

Remarque 1.14. La propriété précédente est très pratique pour retrouver les formules de trigonométrie qu'on a peut-être oublié. Par exemple $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$ donc

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + i\sin(a+b) &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b))\end{aligned}$$

et on retrouve les formules de trigo en identifiant partie réelle et partie imaginaire.

1.4.2 Application à la trigonométrie

Proposition 1.15. *On a la formule de Moivre*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration. Voir TD 1. □

Proposition 1.16. *On peut exprimer $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ comme une somme d'exponentielles complexes :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

1.5 Fonctions usuelles

1.5.1 logarithme et exponentielle

Proposition 1.17. *Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0 \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

De plus, cette fonction vérifie, pour tout $x, y > 0$:

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
2. $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$,
3. $\ln(x^n) = n\ln(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
4. $\ln$ est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$,
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
6. la fonction $\ln$ est concave et $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Remarque 1.18. La fonction $\ln$ s'appelle *logarithme naturel* ou *logarithme néperien*. Elle est caractérisé par $\ln(e) = 1$. On définit également le *logarithme en base a* , pour a un entier naturel non nul, par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \forall x > 0,$$

de sorte que $\log_a(a) = 1$. Pour $a = 10$, on obtient le *logarithme décimal* $\log_{10}$, qui vérifie $\log_{10}(10) = 1$. En informatique, on utilise souvent la fonction $\log_2$, qui vérifie $\log_2(2^n) = n$.

Définition 1.19. On peut définir la fonction exponentielle, de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ comme la bijection réciproque de $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ (voir Figure 1.2).

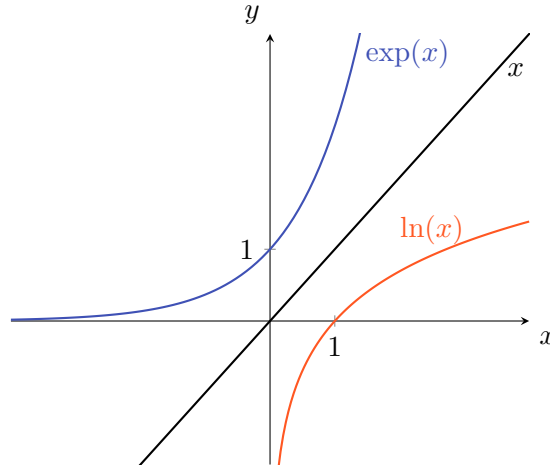


FIGURE 1.2 – Fonctions logarithme et exponentielle

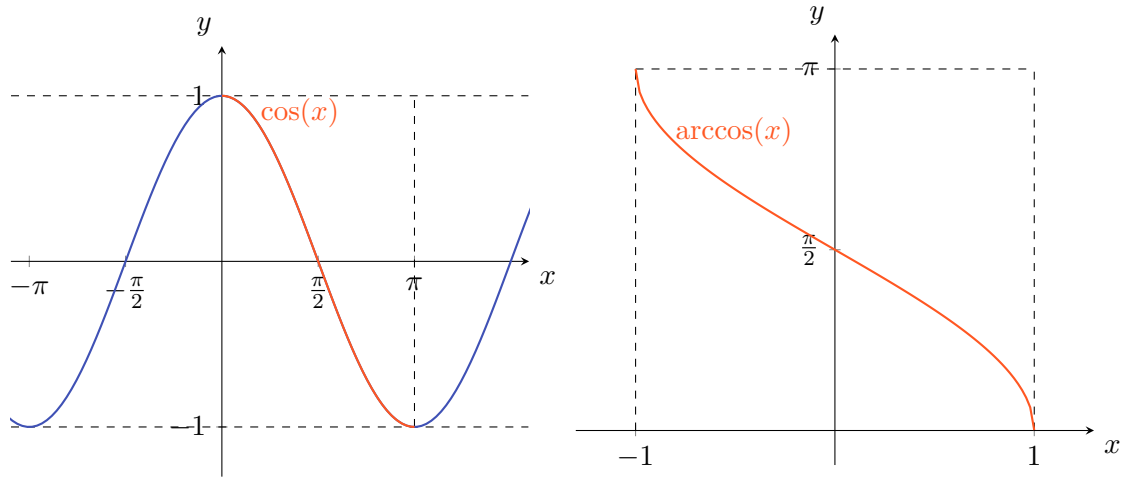


FIGURE 1.3 – Fonctions cosinus et arccosinus

1.5.2 Fonctions circulaires inverses

Arccosinus Considérons la fonction $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$. Afin d'obtenir une bijection à partir de cette fonction, il nous faut nous restreindre à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle, la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc définit bien une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction *arccosinus* définie par

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

représentée sur la Figure 1.3.

On a donc, par définition de la bijection réciproque

$$\begin{aligned} \cos(\arccos(x)) &= x \quad \forall x \in [-1, 1], \\ \arccos(\cos(x)) &= x \quad \forall x \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Arcsinus De même qu'avec la fonction cosinus, on peut définir une bijection avec la fonction sinus en prenant sa restriction à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sa bijection réciproque est appelée *arcsinus*, définie par

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

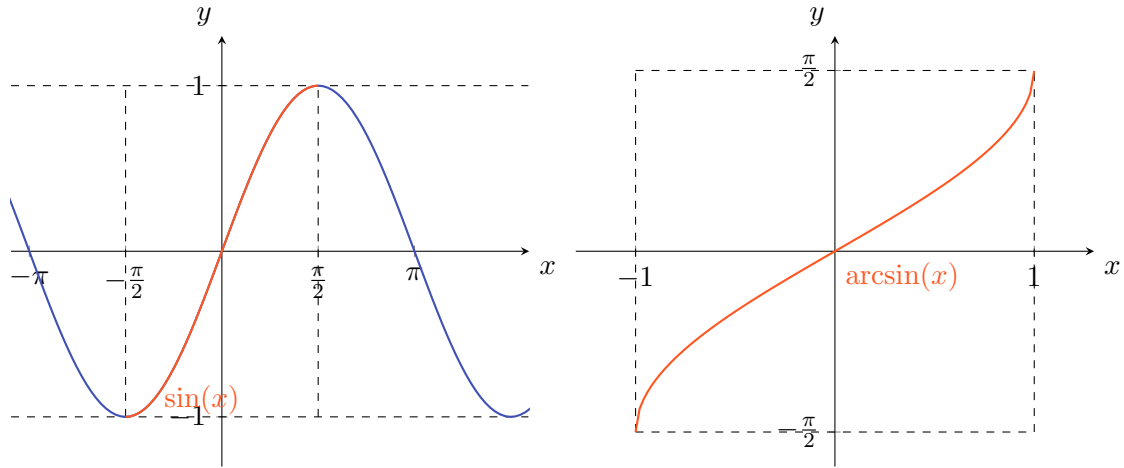


FIGURE 1.4 – Fonctions sinus et arcsinus

et représentée sur la Figure 1.4.

On a donc, par définition de la bijection réciproque

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin(x)) &= x \quad \forall x \in [-1, 1], \\ \arcsin(\sin(x)) &= x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

Tangente et arctangente La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ par

$$\begin{aligned}\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.\end{aligned}$$

Sa restriction à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection dont la bijection réciproque est la fonction *arctangente*, définie par

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

et représentée sur la Figure 1.5.

On a donc, par définition de la bijection réciproque

$$\begin{aligned}\tan(\arctan(x)) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \arctan(\tan(x)) &= x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.\end{aligned}$$

1.5.3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Cosinus hyperbolique et son inverse La fonction *cosinus hyperbolique*, notée $\cosh$ ou ch , est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{aligned}\cosh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.\end{aligned}$$

Sa restriction à l'intervalle $[0, +\infty[$ définit une bijection, dont la bijection réciproque est la fonction *cosinus hyperbolique réciproque*, appelée aussi *argument cosinus hyperbolique*, notée arcosh ou argch , définie par

$$\begin{aligned}\text{arcosh} : [1, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty[\\ x &\mapsto \ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})\end{aligned}$$

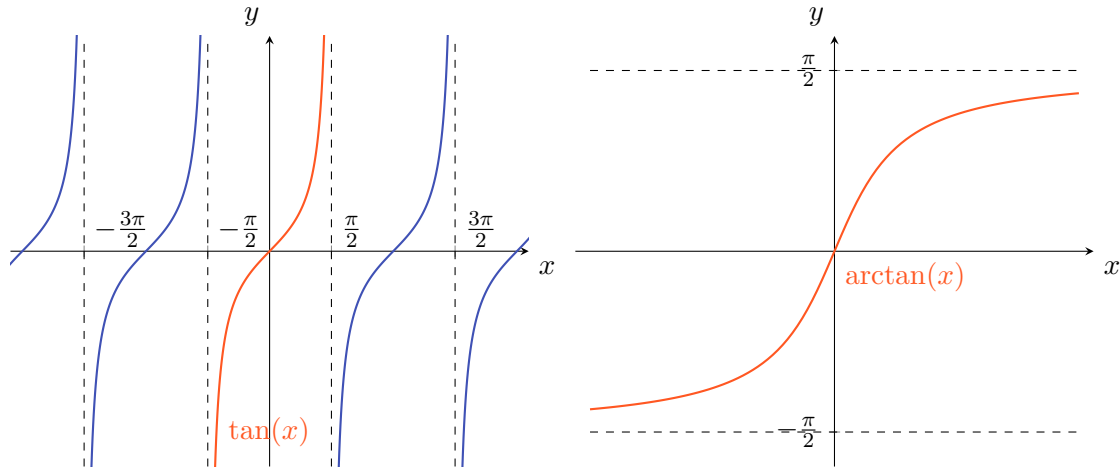


FIGURE 1.5 – Fonctions tangente et arctangente

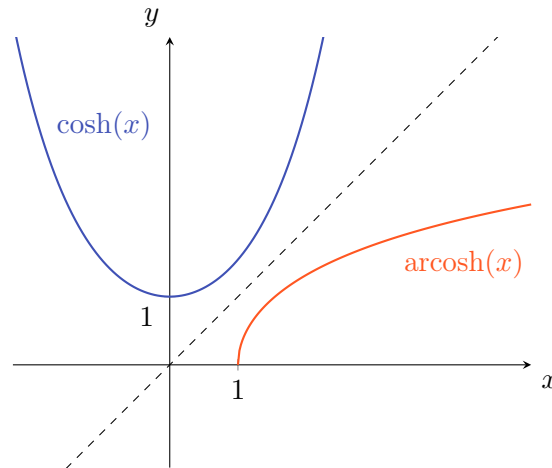


FIGURE 1.6 – Fonctions cosinus hyperbolique et cosinus hyperbolique réciproque

et représentée sur la Figure 1.6.

Sinus hyperbolique et son inverse La fonction *sinus hyperbolique*, notée $\sinh$ ou sh , est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} . \end{aligned}$$

C'est une fonction continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection dont la bijection réciproque est la fonction *sinus hyperbolique réciproque*, appelée aussi *argument sinus hyperbolique*, notée arsinh ou argsh , définie par

$$\begin{aligned} \text{arsinh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1}) \end{aligned}$$

et représentée sur la Figure 1.7.

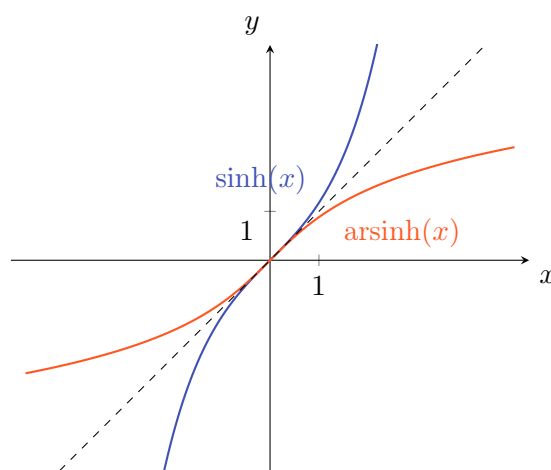


FIGURE 1.7 – Fonctions sinus hyperbolique et sinus hyperbolique réciproque

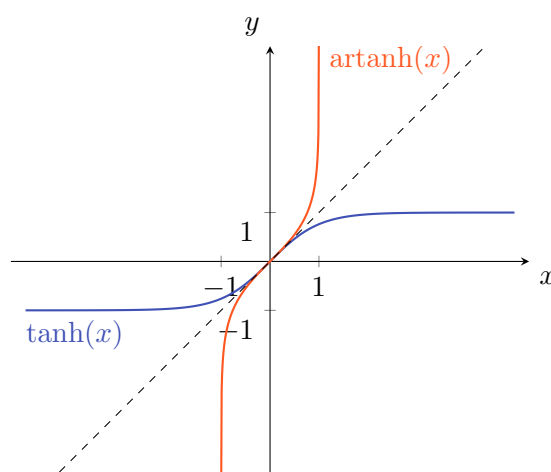


FIGURE 1.8 – Fonctions tangente hyperbolique et tangente hyperbolique réciproque

Tangente hyperbolique et son inverse Par analogie avec la fonction tangente, on définit la fonction *tangente hyperbolique*, notée $\tanh$ ou th par

$$\begin{aligned} \tanh : \mathbb{R} &\rightarrow]-1, 1[\\ x &\mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} . \end{aligned}$$

Cette fonction est continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$. Sa bijection réciproque est la fonction *tangente hyperbolique réciproque*, notée artanh ou argth , définie par

$$\begin{aligned} \text{artanh} :]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

et représentée sur la Figure 1.8.

1.5.4 dérivées de fonctions usuelles

Fonctions usuelles (hors fonctions trigonométriques)

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad x \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leq -1$
$\exp(x) \quad x \in \mathbb{R}$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$x^a = \exp(a \ln(x)) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+$ si $a = 0$ ou $a \geq 1$, $\mathbb{R}_+^*$ si $a < 0$ ou $0 < a < 1$
$a^x = \exp(x \ln(a)) \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$	$\mathbb{R}$
$\ln(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln x \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a(x) \quad \forall a \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\mathbb{R}_+^*$

Fonctions trigonométriques

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$
$\sinh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\cosh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\tanh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$	$\mathbb{R}$

Fonctions trigonométriques réciproques

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$\arcsin(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arccos(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arctan(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arsinh}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arcosh}(x) \quad \forall x \in [1, +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1, +\infty[$
$\operatorname{artanh}(x) \quad \forall x \in] -1, 1[$	$\frac{1}{1-x^2}$	$] -1, 1[$

Opérations sur les dérivées Soient u et v deux fonctions dérivables sur un domaine D de $\mathbb{R}$ et soit k une constante réelle.

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$u + v$	$u' + v'$	D
ku	ku'	D
uv	$u'v + uv'$	D
$u^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$	$nu'u^{n-1}$	D
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	Le sous-ensemble de D sur lequel v ne s'annule pas
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	Le sous-ensemble de D sur lequel v ne s'annule pas

Considérons maintenant D, E et F , trois sous-ensemble de $\mathbb{R}$, une fonction u définie de D dans E et une fonction v définie de E dans F . On a

$$(v \circ u)'(x) = u'(x)(v' \circ u)(x) = u'(x)v'(u(x)) \quad \forall x \in D.$$

1.6 Rappels sur l'intégration de fonctions réelles

Définition 1.20. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite intégrable sur $[a, b]$ si la quantité $\int_a^b f(x)dx < +\infty$, i.e. si elle prend une valeur finie.

Pour limiter un peu le propos ici et simplifier un peu les choses, nous ne nous intéresserons qu'à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle réel.

Définition 1.21. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe un entier n et une subdivision de $[a, b]$ en n sous-intervalles $([x_i, x_{i+1}])_{0 \leq i \leq n}$ telle que

- La restriction de f à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est continue
- La fonction f admet une limite à gauche en x_i et une limite à droite en x_{i+1} pour tout i dans $\{0, \dots, n\}$.

Remarque 1.22. Les fonctions continues sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles sont des fonctions continues par morceaux mais la réciproque est fausse.

L'intérêt des fonctions continues par morceaux est qu'elles permettent d'avoir un cadre assez général pour étudier les propriétés de l'intégrale de fonctions réelles.

Théorème 1.23. Les fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles sont intégrables sur $[a, b]$.

Nous rappelons maintenant quelques propriétés et identités remarquables de l'intégrale.

Proposition 1.24 (Relation de Chasles). Soient $a < b < c$ des réels. Si une fonction f est intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors elle est intégrable sur $[a, c]$ et on a la relation

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Proposition 1.25 (Positivité de l'intégrale). Soient deux fonctions f et g intégrables sur un intervalle réel $[a, b]$. Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. En particulier, si la fonction f est positive, alors son intégrale est positive.

Proposition 1.26. Toute combinaison linéaire ou produit de fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$.

Proposition 1.27 (Inégalité triangulaire). *Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$ alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Si on connaît une primitive de la fonction f que l'on souhaite intégrer, il est facile de calculer la valeur de son intégrale. Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir deux techniques qui permettent de calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.

Théorème 1.28 (Intégration par partie). *Soient u et v deux fonctions continues, dérivables et de dérivées continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Théorème 1.29 (Changement de variables). *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle réel $[a, b]$ et soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une bijection, continue, dérivable et de dérivée continue sur $[a, b]$.*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_a^b f \circ \phi(x)\phi'(x)dx.$$

Chapitre 2

Algèbre linéaire

Dans ce chapitre, on notera $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Matrices et systèmes linéaires

Définition 2.1. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Une matrice A de taille $n \times p$ est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes rempli de coefficients réels ou complexes, notés $(a_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit que la matrice est carrée si $n = p$ et on note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 2.2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- A est dite *triangulaire supérieure* si tous ces coefficients sous la diagonale sont nuls, i.e. si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$.
- A est dite *triangulaire inférieure* si tous ces coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls, i.e. si $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$.
- A est dite *diagonale* si seuls ces coefficients diagonaux sont non nuls, i.e. si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- Si A est diagonale est que tous ces coefficients diagonaux valent 1, on dit que A est la *matrice identité* et on note $A = I_n$.
- Si tous les coefficients de A sont nuls, c'est la matrice nulle, notée 0_n .

Définition 2.3. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée de A , notée A^T , la matrice $A^T = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$.

La transposition échange les lignes et les colonnes. On note parfois la transposée de A en utilisant la notation ${}^t A$.

2.1.1 Opérations sur les matrices

On définit d'abord les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.

Définition 2.4. Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

- La matrice $C = A + B$ est une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, dont les coefficients (c_{ij}) sont définis en sommant termes à termes les coefficients de A et B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p.$$

- La matrice $C = \lambda A$ est une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, dont les coefficients (c_{ij}) sont définis en multipliant tous les coefficients de A par λ :

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p.$$

On peut également définir le produit de deux matrices, mais seulement si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde.

Définition 2.5. Soient n, p, q trois entiers naturels non nuls et soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$. La matrice $C = AB$, issue du produit matriciel de A et B , est la matrice de $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq q.$$

Exemple 2.6. Calculer le produit matriciel de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.7. Attention à certains pièges !

- Le produit de deux matrices A, B n'est pas commutatif, i.e. on n'a pas en général $AB = BA$. On pourra s'en convaincre en multipliant les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- L'égalité $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$. Essayer avec les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} B = \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- L'égalité $AB = AC$ n'implique pas $B = C$ en général. Essayer avec les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.8. Soient n, p, q et r des entiers naturels non nuls. Considérons les matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$. On a alors les résultats suivants.

- $(A + A')B = AB + A'B$ et $A(B + B') = AB + AB'$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda AB = (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
- $ABC = (AB)C = A(BC)$.
- La transposée d'un produit est le produit des transposées (en faisant attention aux dimensions des matrices !)

$$(AB)^T = B^T A^T \in \mathcal{M}_{qn}(\mathbb{K}).$$

Définition 2.9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice B est appelée *inverse* de A , notée A^{-1} .

Théorème 2.10. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible alors son inverse est unique.*

Démonstration. Supposons que A possède deux inverses B_1 et B_2 . On a alors, par définition de l'inverse, $AB_1 = I_n = B_2A$ et il vient,

$$B_2 = B_2(AB_1) = (B_2A)B_1 = B_1.$$

9

2.1.2 Systèmes linéaires

Définition 2.11. Soit n, m deux entiers naturels non nuls.

- Une équation linéaire à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où les coefficients $a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ (i.e. des réels ou des complexes) qui sont donnés et $b \in \mathbb{K}$ est le *second membre* de l'équation, qui est donné également.

- Un système de m équations linéaires à n inconnues est un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lll} a_{11}x_1 & + \dots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + \dots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & + \vdots & + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \dots & + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

où les coefficients $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et les seconds membres $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont donnés.

Résoudre un système linéaire de m équations à n inconnues, c'est donc donner un n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ qui, une fois injecté dans le système, vérifie ces m égalités. Par ailleurs, il n'y a de raison que la solution soit unique ! On parle alors d'*ensemble de solutions*.

Remarque 2.12. Si on définit la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ et le vecteur $b = (b_i) \in \mathbb{K}^n$, il est aisé de voir que le système linéaire est équivalent à l'équation matricielle $Ax = b$, où l'inconnue x est un vecteur de $\mathbb{K}^m$.

Par ailleurs, dans le cas où $m = n$, on a un système carré et une matrice A carrée. Si la matrice A est inversible, on peut alors écrire $x = A^{-1}b$ et on a tout de suite la solution.

Cela justifiera, dans la suite de ce chapitre, l'étude de l'inversibilité des matrices carrées.

Définition 2.13. On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Proposition 2.14. *Considérons un système de m équations à n inconnues et définissons les opérations élémentaires suivantes :*

- Échanger deux lignes (échange),
- Multiplier une ligne par une constante non nulle (homothétie),
- Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne (substitution).

Alors, en modifiant notre système avec un nombre fini d'opérations élémentaires, on obtient un système équivalent.

Remarque 2.15. Si un système possèdent deux équations qui sont multiple l'une de l'autre, on peut alors éliminer une des deux équations et obtenir un système plus petit, équivalent au premier.

Exemple 2.16. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ 2x_1 = 4 \end{cases}$$

De façon générale, on a le résultat suivant.

Théorème 2.17. *Considérons un système de m équations à n inconnues, linéairement indépendantes (i.e. aucune équation n'est multiple d'une autre équation du système).*

- Si $m > n$, on n'a plus d'équations que d'inconnues, le système est dit *sur-déterminé*. Si le système admet une solution, elle est unique.
- Si $m < n$, on n'a plus d'inconnues que d'équations, le système est dit *sous-déterminé*. Si le système admet une solution, elle en admet en fait une infinité.
- Si $m = n$, le système admet une unique solution (et la matrice associée au système est inversible).

Remarque 2.18. En pratique, il est parfois difficile d'identifier les combinaisons linéaires à réaliser pour résoudre un système linéaire. La méthode du pivot de Gauss est une méthode de résolution systématique qui permet de construire un système équivalent échelonné, plus facile à résoudre (voir, par exemple, cette vidéo).

Remarque 2.19. Pour les applications en sciences de l'ingénieur, les systèmes sont tellement gros en général, qu'on ne peut les résoudre à la main. Il faut utiliser un ordinateur et des algorithmes adaptés. En particulier, le calcul de l'inverse d'une matrice, numériquement, n'est pas conseillé, comme nous le verrons en TP.

2.2 Espace vectoriel

2.2.1 Définition et exemples

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en former un troisième $u + v$ (ou $u - v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur λ pour obtenir un vecteur λu .

Définition 2.20. Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (abrévié $\mathbb{K}$ -ev) est un ensemble non vide E muni

- d'une loi de composition interne noté "+", c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans E , qui à deux éléments u et v de E associe l'élément $u + v$,
- d'une loi de composition externe noté " $\cdot$ ", i.e. une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E , qui à un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ et un élément $u \in E$ associe l'élément $\lambda u = \lambda \cdot u$,

qui vérifient les propriétés suivantes, pour tous u, v, w dans E et pour tous λ, μ dans $\mathbb{K}$.

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. Il existe un élément neutre $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$
4. Tout $u \in E$ admet un symétrique $u' \in E$ tel que $u + u' = 0_E$. Cet élément est noté $-u$.

5. $1 \cdot u = u$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v$
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu u$

Remarque 2.21. Pour préciser les lois de composition utilisées avec un ensemble E donné, on note parfois par un tripler $(E, +, \cdot)$ l'espace vectoriel considéré.

Exemple 2.22. Exemples d'espaces vectoriels usuels.

- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication usuelles des réels, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- L'ensemble des vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$, muni de l'addition entre vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un réel, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. C'est aussi le cas pour l'espace $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.
- L'espace de vecteurs $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{K}$ -ev (on peut choisir de prendre les scalaires dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$).
- L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni de la loi d'addition des matrices et la multiplication par un scalaire (élément de $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$ -ev.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans K , noté $K[X]$, muni de l'addition définie par $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$ pour tout $p, q \in K[X]$ et pour tout $x \in K$, ainsi que de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ -ev.
- L'ensemble des fonctions définies d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}([a, b]; \mathbb{R})$, est un $\mathbb{K}$ -ev.

2.2.2 Sous-espace vectoriel

Dans la pratique, afin d'éviter d'avoir huit propriétés à vérifier, on cherchera un espace vectoriel qui contient l'ensemble étudié et on introduira la notion de sous-espace vectoriel.

Définition 2.23. Soit $(E, +, \cdot)$ un K -espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel (abrévié sev) de $(E, +, \cdot)$ si et seulement si

1. F est non vide (typiquement, on vérifiera que $0_E \in F$)
2. F est stable par combinaison linéaire, i.e.

$$\lambda u + \mu v \in F \quad \forall u, v \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Remarque 2.24. Il est facile de vérifier qu'un sev d'un $\mathbb{K}$ -ev, satisfait bien les huit propriétés énoncées plus haut et est donc également un $\mathbb{K}$ -ev.

Exemple 2.25. Montrer que les espaces ci-dessous sont (ou pas) des sous-espaces vectoriels.

1. 0_E est un sev de E .
2. L'ensemble des fonction réelles continues sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, noté $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{F}([a, b]; \mathbb{R})$.
3. L'ensemble $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.
4. L'ensemble $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = 1\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. On considère le système linéaire $AX = 0$. L'ensemble des solutions de ce système linéaire est un sev de $\mathbb{R}^p$.

Définition 2.26. Soient U et V deux sev de E . On dit que U et V sont en somme directe dans E et on note $E = U \oplus V$ si, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(u, v) \in U \times V$ tel que $x = u + v$.

Plus généralement, si $U_1, \dots, U_n$ sont n sev de E , on dit qu'ils sont en somme directe dans E , si pour tout $x \in E$ il existe un unique n -uplet $(u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n u_i$. On note alors $E = \bigoplus_{i=1}^n U_i$.

2.2.3 Famille libre, famille génératrice et base d'un espace vectoriel

Définition 2.27. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille d'éléments de E . On dit que cette famille est libre si toute combinaison linéaire nulle, de la forme

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0,$$

est telle que les coefficients sont tous nuls, i.e.

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Définition 2.28. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille d'éléments de E .

- L'espace engendré par cette famille, noté $\text{vect}(u_1, \dots, u_n)$, est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_n$, i.e.

$$\text{vect}(u_1, \dots, u_n) = \{u \in E; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}; u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n\}.$$

- On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des éléments de cette famille, autrement dit, si

$$E = \text{vect}(u_1, \dots, u_n).$$

Définition 2.29. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est une base de E si elle est libre et génératrice.

Exemple 2.30. Déterminer si les familles suivantes sont libres, génératrices ou une base.

1. La famille formée des vecteurs $e_1 = (1 \ 0)$ et $e_2 = (0 \ 1)$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. La famille des monômes $\{1, X, X^2\}$ dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 2, noté $\mathbb{R}_2[X]$.
3. La famille formée des vecteurs $e_1 = (1 \ 0 \ 0)$ et $e_2 = (0 \ 1 \ 0)$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. La famille formée des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.2.4 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 2.31. Un K -espace vectoriel est dit de dimension finie si il admet une base de taille finie.

Théorème 2.32. *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.*

Définition 2.33. La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie E , noté $\dim E$ est le nombre d'éléments d'une base de E . Si une base de E n'a pas un nombre fini d'éléments, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple 2.34. Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants.

1. Le $\mathbb{R}$ -ev R^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Le $\mathbb{R}$ -ev C^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Le $\mathbb{C}$ -ev C^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}[X]$.
5. Le $\mathbb{R}$ -ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Le $\mathbb{R}$ -ev $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ des fonctions réels de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.35. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère une famille libre $\mathcal{F}$ d'éléments de E , $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E et $\mathcal{B}$ une base de E . Par ailleurs, notons $\text{card}\mathcal{F}$ le nombre d'éléments d'une famille quelconque.

Alors, on a toujours

$$\text{card}\mathcal{F} \leq \text{card}\mathcal{B} = \dim E \leq \text{card}\mathcal{G}.$$

De plus, si $\text{card}\mathcal{F} = \dim E$ alors $\mathcal{F}$ est une base de E . De même, si $\text{card}\mathcal{G} = \dim E$ alors $\mathcal{G}$ est une base de E .

On peut maintenant faire le lien entre base et somme directe de sous-espace vectoriel, grâce au résultat suivant.

Théorème 2.36. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, n , et $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E . Alors les sous-espace engendré par les éléments de la base sont en sommes directes dans E , i.e.

$$E \bigoplus_{i=1}^n \text{vect}(u_i).$$

Remarque 2.37. Les notions de base et de sommes directes de sev seront particulièrement importantes pour l'étude de la diagonalisation des matrices.

2.3 Applications linéaires

Nous allons maintenant nous intéresser aux applications entre sev qui conservent l'addition et la multiplication par un scalaire.

Définition 2.38 (Application linéaire). Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une fonction définie de E dans F . Alors f est linéaire si

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Exemple 2.39. Montrer que les fonctions ci-dessous sont linéaires.

1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$.
2. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (2x, -x) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f : p \in \mathbb{R}[X] \mapsto p(0) \in \mathbb{R}$.
4. $f : f \in C^0([0, 1]; \mathbb{R}) \mapsto \int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R}$.

Définition 2.40 (de $\mathcal{L}(E; F)$). L'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E; F)$; c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de applications de E dans F . Si $E = F$, on note simplement cet ensemble $\mathcal{L}(E)$ et on dit que les éléments de $\mathcal{L}(E)$ sont des *endomorphismes*.

Démonstration. On a, par définition, que $\mathcal{L}(E; F) \subset \mathcal{F}(E; F)$, l'ensemble des applications de E dans F , qui est un $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel (admis). Par ailleurs, la fonction nulle appartient à $\mathcal{L}(E; F)$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E; F)$. Montrons alors que l'application $\lambda u + \mu v$ est linéaire.

Soient $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$(\lambda u + \mu v)(\alpha x + \beta y) = \lambda u(\alpha x + \beta y) + \mu v(\alpha x + \beta y) = \alpha(\lambda u(x) + \mu v(x)) + \beta(\lambda u(y) + \mu v(y)).$$

Donc cette application est bien linéaire, ce qui signifie que $\mathcal{L}(E; F)$ est bien un sev de $\mathcal{F}(E; F)$. $\square$

Remarque 2.41. Ce résultat implique en particulier que toute combinaison linéaire d'applications linéaires de E dans F est une application linéaire sur les mêmes espaces.

Rappelons maintenant quelques points de vocabulaire.

Définition 2.42 (Injectivité). Une application f définie sur un ensemble X et à valeurs dans un ensemble Y est dite injective si deux éléments disjoints de X ont des images disjointes par f , i.e.

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y),$$

ou encore, par contraposition,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Définition 2.43 (Surjectivité). Une application f définie sur un ensemble X et à valeurs dans un ensemble Y est dite surjective si tout élément de Y est l'image d'au moins un élément de X par f , i.e.

$$\forall y \in Y, \quad \exists x \in X \quad \text{such that} \quad y = f(x).$$

Définition 2.44 (Bijectivité). Une application f définie sur un ensemble X et à valeurs dans un ensemble Y est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, elle admet une application réciproque notée

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

telle que

$$\forall x \in X, \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in Y, f(f^{-1}(y)) = y.$$

Maintenant, appliquées aux applications linéaire sur des espaces vectoriels, on a le résultat suivant.

Théorème 2.45. Si f est une application linéaire bijective de E dans F , alors l'application réciproque f^{-1} est une application linéaire bijective de F dans E .

La composition d'application linéaire est aussi une application linéaire, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.46. Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et si $g : F \rightarrow G$ est linéaire alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est linéaire.

Démonstration. Pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a, en utilisant la linéarité de f et de g ,

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda x + \mu y) &= g(f(\lambda x + \mu y)) = g(\lambda f(x) + \mu f(y)) \\ &= \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)) = \lambda g \circ f(x) + \mu g \circ f(y). \end{aligned}$$

$\square$

2.3.1 Image, noyau et rang d'une application linéaire

Définition 2.47. Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

- On appelle *noyau* de f l'ensemble

$$\ker f = \{x \in E; f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

- On appelle *image* de f l'ensemble

$$\operatorname{im} f = f(E) = \{y \in F; \exists x \in E, f(x) = y\}.$$

Une propriété importante au vu de ce cours sur les espaces vectoriels est la suivante.

Proposition 2.48. *Le noyau de f est un sev de E et l'image de f est un sev de F .*

Ces notions de noyau et d'image d'une application linéaire nous permettent alors de caractériser les propriétés d'injectivité et de surjectivité de ces applications, *via* le théorème suivant.

Théorème 2.49. *Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.*

- f est injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$.
- f est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{im} f = F$.

Démonstration. La deuxième proposition est une simple reformulation de la définition de la surjectivité.

Concernant la première proposition, supposons que f est injective et supposons par l'absurde qu'il existe $x \in E$, non nul, tel que $f(x) = 0_F$. Par ailleurs, comme f est linéaire, on sait déjà que $f(0_E) = 0_F$. Maintenant, comme f est injective, on a

$$f(x) = f(0_E) \implies 0_E = x,$$

ce qui amène à une contradiction. Donc $\ker f = \{0_E\}$.

Réciproquement, supposons que $\ker f = \{0_E\}$ et considérons deux vecteurs $x_1, x_2 \in E$ qui ont la même image par f , i.e. tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Par linéarité de f , il vient que $f(x_1 - x_2) = 0_F$ et donc que $x_1 - x_2 \in \ker f$, c'est-à-dire $x_1 = x_2$ et on en déduit que f est injective. $\square$

On va maintenant étudier l'action des applications linéaires sur les bases d'espaces vectoriels. Tout d'abord une première définition.

Définition 2.50. Soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$. On définit le rang de f par la dimension de son image, c'est-à-dire,

$$\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{im} f.$$

Proposition 2.51. *Soient E un K -ev de dimension finie, $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E; F)$ où F est un $\mathbb{K}$ -ev. Alors, la famille des $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{im} f$, i.e.*

$$\operatorname{im} f = \operatorname{vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

et $\operatorname{rang} f \leq n = \dim E$.

Les dimensions du noyau de l'image d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels, nous donne aussi des informations sur les propriétés d'injectivité et de surjectivité de l'application.

Théorème 2.52. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies et soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

1. $\text{rang } f \leq \min(\dim E, \dim F)$
2. L'application f est surjective si et seulement si $\text{rang } f = \dim F$
3. L'application f est injective si et seulement si $\text{rang } f = \dim E$
4. L'application f est bijective si et seulement si $\text{rang } f = \dim E = \dim F$

On déduit alors des résultats précédent le corollaire suivant.

Corollaire 2.53. Si $f \in \mathcal{L}(E; F)$ est bijective, l'image d'une base est une base.

On en arrive finalement à un des résultats les plus importants de l'algèbre linéaire : le Théorème du rang.

Théorème 2.54 (du Rang). Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels (de dimensions finies ou infinies) et soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$ une application linéaire. Alors

$$\text{rang } f + \dim \ker f = \dim E.$$

En effet, ce théorème est très utile car il permet, en étudiant le noyau d'une application linéaire (ce qui est plus facile que d'étudier son image en générale), de déterminer le rang de l'application et ainsi d'étudier ses propriétés d'injectivité et de surjectivité.

2.4 Matrice d'une application linéaire

2.4.1 Définitions et propriétés

Dans cette section, nous considérons deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriel E et F de dimensions finies : $\dim E = p$ et $\dim F = n$. On considère de plus une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ de F .

Définition 2.55. Soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$. On appelle *matrice associée à l'application linéaire f par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$* la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $(f(e_j))_{1 \leq j \leq p}$ exprimées dans la base $\mathcal{B}_F$. Plus précisément,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{matrix} \\ \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

où, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, les coefficients a_{ij} sont les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ exprimées dans la base $\mathcal{B}_F$, i.e.

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i.$$

Remarque 2.56. On voit bien dans la définition précédente que la matrice d'une application linéaire dépend des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ choisies.

Exemple 2.57. Quelques exemples de constructions de matrice d'une application linéaire.

1. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$. Si on considère les bases canoniques de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = (1)$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1, 0); (0, 1))$, on obtient la matrice de $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ suivante

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on considère une autre base de $\mathbb{R}^2$, par exemple $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2} = ((1, 1); (1, -1))$, on a $f(1, 1) = 2$ et $f(1, -1) = 0$ et la matrice dans cette base s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, y - 2x) \in \mathbb{R}^2$. Si on considère la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on obtient la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on considère une autre base de $\mathbb{R}^2$ (pour l'espace E uniquement), par exemple $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2} = ((1, 2); (1, -1))$, on a $f(1, 2) = (3, 0)$ et $f(1, -1) = (0, -3)$ et on obtient la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Une remarque en passant : on a trouvé une base de E pour laquelle la matrice associée à notre application linéaire est diagonale.

Proposition 2.58. Soient $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $x \in E$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_E$ sont regroupées dans le vecteur $X = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. On a alors que les coordonnées du vecteur $f(x) \in F$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont données par les coordonnées du vecteur $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)X \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j.$$

Or,

$$f(x) = \sum_{j=1}^p x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^n f_i \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j,$$

ce qui implique le résultat souhaité. $\square$

Ainsi, on a une bijection entre l'application linéaire f sur des ev de dimensions finies et sa représentation sous forme de matrice. Pour étudier f , nous pouvons étudier sa matrice associée et *vice versa*.

Théorème 2.59. L'application qui à une application $f \in \mathcal{L}(E; F)$ associe la matrice de l'application f par rapport à des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, i.e. l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E; F) &\rightarrow \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{aligned}$$

est une bijection

Voyons maintenant quelques propriétés des matrices associées à des applications linéaires.

Proposition 2.60. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E; F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons M la matrice associée à f par rapport à des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et N la matrice associée à g dans ces mêmes bases. Alors, la matrice associée à l'application linéaire $\lambda f + g$ dans ces mêmes bases est $\lambda M + N$.

Proposition 2.61. Soient trois espaces vectoriels de dimensions finies E, F et G , munis de bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Soient $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $g \in \mathcal{L}(F; G)$, dont les matrices associées dans les bases correspondantes sont notées M et N , réciproquement. Alors, la matrice associée à l'application linéaire $g \circ f \in \mathcal{L}(E; G)$, par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$ est la matrice produit NM ,

Il est également possible de caractériser la bijectivité d'une application linéaire par l'inversibilité de sa matrice associée.

Proposition 2.62. Supposons que $\dim E = \dim F$. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E; F)$ est bijective si et seulement si sa matrice associée A (par rapport à des bases quelconques de E et F) est inversible. Dans ce cas, la matrice associée à l'application linéaire f^{-1} dans les mêmes bases est la matrice A^{-1} .

Pour faire le lien avec le Théorème 2.52, on peut également définir le rang d'une matrice.

Définition 2.63. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $(C_i)_{1 \leq i \leq p}$ l'ensemble des vecteurs colonnes de A . Alors, le rang d'une matrice est défini par la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs (C_i) , i.e.

$$\text{rang } A = \dim \text{vect}(C_1, \dots, C_p).$$

Proposition 2.64. Si A est une matrice associée à une application linéaire f alors

$$\text{rang } A = \text{rang } f.$$

On en déduit alors facilement une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit inversible.

Théorème 2.65. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\text{rang } A = n$.

2.4.2 Matrice de changement de base

On a vu que la définition d'une matrice associée à une application linéaire dépend du choix des bases. Considérons deux bases de E , notées $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$. On peut construire une matrice dite *de passage* qui permet de relier les coordonnées d'un vecteur dans $\mathcal{B}_E$ à celles dans $\mathcal{B}'_E$.

Définition 2.66. La matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$, noté $P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$ est la matrice carrée dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'_E$ exprimés dans la base $\mathcal{B}_E$.

Exemple 2.67. Dans $\mathbb{R}^2$, si on considère les bases $\mathcal{B} = ((1, 0); (0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1); (1, -1))$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.68. Soient $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage entre deux bases de E , $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et $x \in E$ un vecteur de coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$ et de coordonnées X' dans la base $\mathcal{B}'$, alors on a

$$X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'.$$

Proposition 2.69. Une matrice de passage entre deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est donnée par

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}.$$

Les matrices de passage sont aussi utiles pour obtenir les formules de changement de base d'une application linéaire.

Théorème 2.70. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E , $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F . Soit encore f une application linéaire de E dans F . On note A la matrice associée à f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et on note B la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$. On note également P la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$. Alors, on a les relations suivantes

$$A = QBP^{-1} \quad \text{et} \quad B = Q^{-1}AP.$$

2.5 Déterminant d'une matrice

2.5.1 Définitions et propriétés

Le déterminant d'une matrice est une application notée $\det$ définie sur l'ensemble des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. La définition formelle du déterminant est assez abstraite et peu utilisable en pratique, c'est pourquoi nous allons en donner une définition par récurrence, sur la taille de la matrice.

Avant cela, introduisons la notations suivante.

Notation 2.71. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $A_{i,j}$ la sous-matrice de A à laquelle il a été enlevée la i ème ligne et la j ème colonne.

Exemple 2.72.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_{1,3} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Définition 2.73. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Le déterminant de A , noté $\det A$ est défini par récurrence de la façon suivante :

- Si $n = 1$, la matrice A est identifié à un scalaire réel ou complexe et le déterminant de A est identifié au module (ou à la valeur absolue) de son unique coefficient, $\det A = |a_{11}|$.
- Si $n = 2$, le déterminant de A est défini par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Si $n > 2$, le déterminant de A est défini pour n'importe quel $i \in \{1, \dots, n\}$, par

$$\det A = (-1)^{i+1}a_{i1} \det A_{i,1} + (-1)^{i+2}a_{i2} \det A_{i,2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in} \det A_{i,n},$$

ou, de façon équivalente, pour n'importe quel $j \in \{1, \dots, n\}$, par

$$\det A = (-1)^{j+1}a_{1j} \det A_{1,j} + (-1)^{j+2}a_{2j} \det A_{2,j} + \dots + (-1)^{j+n}a_{nj} \det A_{n,j}.$$

Pour la première formule, on parle de *développement par rapport à la ligne i* et pour la deuxième formule on parle de *développement par rapport à la colonne j* .

Exemple 2.74. Reprenons la matrice de l'exemple précédent et appliquons lui un développement par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= (-1)^2 \times 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \times 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^4 \times 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 5 \times 9 - 8 \times 6 - 4(2 \times 9 - 8 \times 3) + 7(2 \times 6 - 5 \times 3) \\ &= -3 + 24 - 21 = 0. \end{aligned}$$

Maintenant, quelques propriétés du déterminant.

Proposition 2.75. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $\det A = \det A^T$.
- $\det(I_n) = 1$.
- Si A est une matrice diagonale alors $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.
- Si A est une matrice triangulaire alors $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.
- $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ en général.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- $\det(AB) = \det A \det B$.
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.
- Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, alors $\det P^{-1}AP = \det A$.

2.5.2 Règles de calcul

Voici quelques règles de calculs facilitant le calcul du déterminant d'une matrice.

Proposition 2.76. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes de A , avec les règles de calcul suivantes.

- Si une ligne ou une colonne de A est nulle, alors $\det A = 0$.
- Si une ligne (resp. une colonne) de A est une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes) alors $\det A = 0$.
- Si B est la matrice obtenue en multipliant une ligne (ou une colonne) de A par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det B = \lambda \det A$.

Ainsi, combinées aux formules de développement par rapport à une ligne ou une colonne, ces règles de calcul permettent de simplifier le calcul du déterminant d'une matrice.

Exemple 2.77. Reprenons la matrice des exemples précédent et effectuons des opérations sur ces colonnes avant de développer par rapport à la première ligne. Plus précisément, on va retrancher deux fois la première colonne à la deuxième colonne et trois fois la première colonne à la troisième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = (-3) \times (-12) - (-6) \times (-6) = 0.$$

2.5.3 Applications

En plus d'être un critère pour savoir si une matrice est inversible, le déterminant peut être utilisé pour calculer l'inverse d'une matrice ou pour résoudre des systèmes linéaires.

Définition 2.78. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *comatrice* de A et on note $\text{com } A$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$(\text{com } A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j},$$

où on rappelle que $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la i ème ligne et la j ème colonne de A .

Ainsi, on peut utiliser cette notion de comatrice pour calculer l'inverse d'une matrice.

Proposition 2.79. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{com } A)^T.$$

Enfin, si on revient à la résolution de système linéaire, on a le résultat suivant.

Proposition 2.80. Considérons un système linéaire de n équations à n inconnues, écrit sous sa forme matricielle $AX = Y$ où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y = (y_i) \in \mathbb{K}^n$ sont donnés et $X = (x_i) \in \mathbb{K}^n$ est à déterminer. Alors, ce système admet une unique solution si et seulement si $\det A \neq 0$ et, dans ce cas, la solution peut être déterminée en utilisant les formules dites de Cramer :

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & y_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}{\det A} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

2.6 Valeurs propres et vecteurs propres

2.6.1 Définition et exemples

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice associée à f dans une base quelconque de E .

Définition 2.81. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de f si et seulement si $\ker(f - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$.

On appelle *vecteur propre* de f associé à la valeur propre λ , tout vecteur $x \in E$ non nul tel que

$$f(x) = \lambda x.$$

Enfin, on appelle *espace propre associé* à λ , l'ensemble

$$E_\lambda(f) = \{x \in E; f(x) = \lambda x\} = \ker(f - \lambda \text{id}).$$

De plus, l'espace propre $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Grâce à la représentation d'une application linéaire en tant que matrice, on obtient la caractérisation suivante des valeurs propres d'une application linéaire, plus facile à utiliser en pratique.

Proposition 2.82. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$. On dit que λ est une valeur propre de la matrice A .

Par ailleurs, si on définit le polynôme $P_A(X) = \det(A - XI_n)$, appelé *polynôme caractéristique* de A on peut récrire le résultat précédent sous la forme suivante.

Proposition 2.83. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si et seulement si c'est une racine du polynôme $P_A(X) = \det(A - XI_n)$ de degré n .

On est ainsi ramené pour la recherche des valeurs propres d'une matrice à un problème classique des mathématiques, d'une importance historique majeure, trouver les racines d'un polynôme de degré n (comme vu au premier chapitre).

Remarque 2.84. Comme vu précédemment, la matrice A associée à une application linéaire f dépend de la base considérée. Par contre son polynôme caractéristique P_A sera toujours le même. Cela est lié au fait que, pour toute matrice de changement de base P , on a $\det P^{-1}AP = \det A$.

Comme un tel polynôme a au plus n racines, on peut tout de suite en déduire le corollaire suivant.

Corollaire 2.85.

- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute matrice admet au moins une valeur propre.

Exemple 2.86. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P_A(X) = X^2 + 1$$

et admet les racines $\{i, -i\}$. Ainsi on a trouvé les valeurs propres de A : $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

Pour déterminer les vecteurs propres, on doit résoudre les système

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \quad \text{et} \quad AX_2 = \lambda_2 X_2$$

dont les solutions sont les vecteurs

$$X_1 \in E_{\lambda_1} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; y = ix\}$$

$$X_2 \in E_{\lambda_2} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x = iy\}.$$

En particulier, on peut choisir $X_1 = (1, i)$ et $X_2 = (i, 1)$.

On remarquera que les deux sous-espace propres sont des $\mathbb{C}$ -ev de dimension 1.

2.6.2 Diagonalisation de matrice

Définition 2.87. Suivant que l'on considère l'application linéaire f ou sa matrice associée A dans une base $(e_i)_{1 \leq n}$, on a les définition suivantes :

- On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E , $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ et des scalaires $(\lambda)_{1 \leq i \leq n}$ tels que

$$f(f_i) = \lambda_i f_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

- On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Remarque 2.88. La matrice P de la définition précédente est la matrice de passage de la base (e_i) à la base (f_i) .

Un critère nécessaire et suffisant de diagonalisation d'une matrice est alors le suivant.

Théorème 2.89. Une matrice A est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E constituée de ses vecteurs propres, c'est-à-dire si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de A .

En terme de polynôme caractéristique, cela se traduit alors de la manière suivante.

Théorème 2.90. Une matrice A est diagonalisable si et seulement si

1. son polynôme caractéristique P_A est scindé sur $\mathbb{K}$, i.e.

$$P_A(X) = C \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i},$$

où r est le nombre de racines de P_A et les $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont leurs multiplicités respectives, et

2. pour toute valeur propre λ_i on a $m_i = \dim E_{\lambda_i}$.

Une condition suffisante (mais pas nécessaire), bien utile en pratique est alors la suivante.

Corollaire 2.91. *Soit A une matrice. Si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples alors la matrice est diagonalisable.*

Exemple 2.92. Reprenons l'exemple de la matrice précédente. Son polynôme caractéristique $P_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur R mais l'est sur $\mathbb{C}$. Par ailleurs, nous avons les multiplicités $m_1 = m_2 = 1 = \dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2}$. On en déduit que la matrice n'est pas diagonalisable dans R mais elle l'est dans $\mathbb{C}$. Il reste à déterminer la matrice P . Comme nous l'avons vu, c'est la matrice de passage de la base dans laquelle la matrice A est écrite (ici la base canonique) dans la base des vecteurs propres de A . On a donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et on peut écrire la diagonalisation de A comme

$$A = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}.$$

2.6.3 Applications

Systèmes linéaires Considérons un système linéaire écrit sous forme matricielle $AX = Y$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathbb{K}^n$ donnés et $X \in \mathbb{K}^n$ à déterminer.

Si A est diagonalisable, il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$. En multipliant le système par P^{-1} à gauche on obtient alors

$$P^{-1}PDP^{-1}X = DP^{-1}X = P^{-1}Y.$$

Posons maintenant $Z = P^{-1}X$ et $V = P^{-1}Y$, on se retrouve avec le système diagonale $DZ = V$ qui est directement inversible :

$$Z = D^{-1}V,$$

où D^{-1} est la matrice diagonale dont le i ème coefficient diagonal vaut d_{ii}^{-1} . Finalement, on obtient

$$X = PZ.$$

Puissance de matrice Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, alors

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}, \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence immédiate on obtien alors que $A^m = PD^mP^{-1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Exponentielle de matrice Soit $z \in \mathbb{C}$, on rappelle que l'on définit l'exponentielle complexe comme

$$\exp z = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k!}.$$

De même pour une matrice carré $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit l'exponentielle d'une matrice comme

$$\exp A = I_n + \sum_{k \geq 1} \frac{A^k}{k!},$$

en supposant bien entendu que cette suite converge.

Si A est une matrice diagonale, la matrice $\exp A$ est une matrice diagonale dont les entrées sont l'exponentielle des coefficients de A : $(\exp A)_{ii} = \exp(a_{ii})$.

Si A est diagonalisable, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$ et on peut montrer que

$$\exp A = \exp(PDP^{-1}) = I_n + PDP^{-1} + \frac{1}{2}PDP^{-1}PDP^{-1} + \dots + \frac{1}{k!}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = P \exp(D) P^{-1}.$$

Systèmes différentiels Voir Chapitre 3.

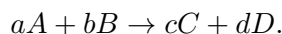
Méthode de Hückel Méthode de calcul des orbitales moléculaire d'hydrocarbures purs (voir TD2).

Chapitre 3

Équations différentielles ordinaires

3.1 Motivation

Pourquoi s'intéresser à l'étude des équations différentielles ordinaires ? Prenons l'exemple de la chimie cinétique. Considérons une réaction chimique de la forme



D'une part, les coefficients stoechiométriques de l'équation relient les vitesses de réaction de chacune des espèces,

$$v = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt}.$$

D'autre part, on peut écrire la vitesse de réaction s'écrit en fonction des concentrations des réactions sous la forme

$$v = k[A]^m[B]^n,$$

où k (la constante de vitesse) et m et n (les ordres de réactions des réactifs A et B) sont à déterminer, le plus souvent expérimentalement. On obtient alors le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= -a[A]^m[B]^n, \\ \frac{d[B]}{dt} &= -b[A]^m[B]^n. \end{aligned}$$

L'étude des équations différentielles ordinaires permet alors de prédire l'évolution des espèces chimiques, de déterminer les états d'équilibre du systèmes, d'optimiser la production d'un composé chimique, de prédire la corrosion de matériaux, etc.

3.2 Définitions

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation dont l'inconnue est une fonction, notée y , et qui dépend des dérivées de y . On se restreindra ici à des fonctions définie de sur un intervalle réel $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 3.1.

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ y'(x) &= 1 + \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ y''(x) &= \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Définition 3.2. Définissons les notions d'équation différentielle, de système différentiel et de solution.

- Une équation différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est une équation de la forme

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.1)$$

où F est une fonction de $n + 2$ variables.

- Une solution d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (3.1).
- Un système différentiel d'ordre n est un ensemble de $p \in \mathbb{N}^*$ équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_p, y_p', \dots, y_p^{(n)}) = 0 \\ \vdots \\ F_p(x, y_p, y_p', \dots, y_p^{(n)}, \dots, y_p, y_p', \dots, y_p^{(n)}) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où les F_i sont des fonctions de $n + 2$ variables.

- Une solution d'un tel système sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une famille de p fonctions $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont n fois dérivables et qui vérifient le système différentiel (3.2).

3.3 Équations différentielles d'ordre 1 à variables séparées

Une équation différentielle à variables séparées est une équation du type :

$$y'(x)f(y(x)) = g(x)$$

où f, g sont deux fonctions réelles. Une telle équation se résout par la recherche de primitives des fonctions f et g . En effet, si F est une primitive de f et G est une primitive de g , on a

$$G'(x) = g(x) \quad \text{et} \quad (F(y(x)))' = y'(x)F'(y(x)) = y'f(y(x)).$$

Ainsi, l'équation différentielle devient

$$(F(y(x)))' = G'(x),$$

ce qui équivaut à l'égalité entre fonctions $F(y(x)) = G(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ une constante.

Exemple 3.3. Résoudre les équations à variables séparées suivantes.

1. $x'(t) = 2x(t)$,
2. $x^2y'(x) = \exp(-y(x))$.

3.4 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On se donne trois fonctions $u, v, w : I \rightarrow \mathbb{K}$ et on souhaite étudier, dans cette section, les équations de la forme

$$u(x)y'(x) + v(x)y(x) = w(x) \quad \forall x \in I.$$

C'est la forme générale d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1.

Notation 3.4. Un point de vocabulaire.

- Si le second membre w est nul, on dit que l'équation différentielle est *homogène*.

- Lorsque la fonction u ne s'annule pas, on peut récrire l'EDO sous la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

où $a(x) = v(x)/u(x)$ et $b(x) = w(x)/u(x)$. On dit alors que l'équation est *résolue en y'* .

On a alors le résultat suivant pour une EDO homogène et résolue en y' .

Théorème 3.5. *Considérons l'EDO homogène et résolue en y'*

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \quad x \in I,$$

et notons A une primitive de la fonction a sur l'intervalle I . Alors, cette EDO admet pour solutions l'ensemble

$$\mathcal{S}_h = \{y : x \in I \mapsto k \exp(-A(x)); k \in \mathbb{K}\}.$$

De plus, $\mathcal{S}_h$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I; \mathbb{K})$ de dimension 1.

Par ailleurs, soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ il existe une unique solution telle que $y(x_0) = y_0$. On appelle ce couple (x_0, y_0) une condition initiale pour l'EDO considérée.

Démonstration. On vérifie facilement que $y(x) = k \exp(-A(x))$ est solution, pour tout $k \in \mathbb{K}$. Cela implique que $\text{vect}(y : x \in I \rightarrow k \exp(-A(x))) = \{y : x \in I \rightarrow k \exp(-A(x)); k \in \mathbb{K}\} \subset \mathcal{S}_h$.

Réciproquement, soit $y \in \mathcal{S}_h$. On définit la fonction z sur I par $z(x) = y(x) \exp(A(x))$ et par dérivation on obtient que

$$z'(x) = y'(x) \exp(A(x)) + a(x)y(x) \exp(A(x)) = (y'(x) + a(x)y(x)) \exp(A(x)).$$

Or, y est solution de l'EDO donc $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ et on en déduit que la fonction z est constante : il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $z(x) = k$ pour tout x de I . Ainsi, on obtient $y(x) = z(x) \exp(-A(x)) = k \exp(-A(x))$, ce qui signifie que $\mathcal{S}_h \subset \text{vect}(y : x \in I \rightarrow k \exp(-A(x)))$.

On en conclut que $\mathcal{S}_h = \text{vect}(y : x \in I \rightarrow k \exp(-A(x)))$ qui est un sev de $\mathcal{F}(I; \mathbb{K})$ de dimension 1 par définition.

Parmi les solutions de $\mathcal{S}_h$, déterminons celles qui vérifient la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

$$y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow k \exp(-A(x_0)) = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 \exp(A(x_0)),$$

ce qui détermine bien une unique solution. □

Dans le cas général d'une EDO avec second membre, on applique alors le *principe de superposition*.

Théorème 3.6. *Considérons l'équation*

$$y'(x) + ay(x) = b(x) \quad x \in I, \tag{E}$$

ainsi que l'équation homogène associée

$$y'(x) + ay(x) = 0 \quad x \in I. \tag{E_h}$$

Si y_p est une solution particulière de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) s'écrit

$$\mathcal{S} = \{y : I \rightarrow \mathbb{K}; y = y_p + y_h, y_h \in \mathcal{S}_h\},$$

où $\mathcal{S}_h$ est l'ensemble des solutions de (E_h).

Par ailleurs, soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution y de (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

La recherche d'une solution générale (E) revient donc à la recherche d'une solution particulière, après avoir étudié les solutions de l'équation homogène associée. Parfois, cela se fait en remarquant une solution évidente. Si ce n'est pas le cas, on peut utiliser la *méthode de variation de la constante*.

Méthode de variation de la constante Soit y_h une solution non nulle de l'équation homogène. La méthode de variation de la constante consiste à rechercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = y_h(x)z(x)$. En tant que solution, y_p vérifie alors

$$y_p'(x) + a(x)y_p(x) = y_h'(x)z(x) + y_h(x)z'(x) + a(x)y_h(x)z(x) = b(x).$$

Or, comme y_h est solution de l'équation homogène, on obtient l'équation suivante sur z

$$y_h(x)z'(x) = b(x),$$

qui permet de déterminer z et donc la solution particulière y_p .

Exemple 3.7. Résoudre les EDO suivantes.

1. $y'(x) + y(x) = \exp(x) + 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $(x^2 + 1)y'(x) + 4xy(x) = \exp(-x)$ sur $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0

On s'intéresse à nouveau à une équation différentielle $(\mathcal{E})$ non résolue en y' de la forme

$$u \cdot y' + v \cdot y = w,$$

où u s'annule sur I . Les seuls résultats qui restent valables sont ceux de la première section.

En pratique :

1. Résoudre $(\mathcal{E})$ sur les sous-intervalles de I définis par les zéros de u (zéros exclus) sur lesquels u ne s'annule pas.
2. Les restrictions à ces sous-intervalles d'une éventuelle solution sur I sont des solutions.
3. On étudie donc la possibilité de raccorder les solutions "partielles" pour former des solutions sur I .

Étudions quelques exemples :

Exemple 3.8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(\mathcal{E})$ $x^2 y' - y = 0$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, $(\mathcal{E})$ est équivalente à $y' = x^{-2}y$. Les solutions sont alors générées par la fonction

$$x \in \mathbb{R}^* \rightarrow \exp(-1/x) \in \mathbb{R}.$$

Une éventuelle solution y sur $\mathbb{R}$ vérifie :

$$\begin{cases} y(x) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x < 0, \\ y(x) = C_2 \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ y(0) = 0, & \text{d'après } (\mathcal{E}). \end{cases} \quad (3.3)$$

Réciproquement, si nous définissons y par les formules données en (3.3), alors y sera solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si y est dérivable en 0 car les autres conditions seront vérifiées par construction.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^-} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$, la continuité à gauche de y en $x = 0$ exige $C_1 = 0$. Ainsi, il reste :

$$\begin{cases} y(x) = 0, & x \leq 0, \\ y(x) = C \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Cette fonction est dérivable en 0 pour toute constante C . En effet, si $x > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} C \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x} = 0.$$

Remarquons cependant que pour une condition initiale y_0 non nulle, il ne passe aucune solution y telle que $y(x_0) = y_0$ si $x_0 \leq 0$. De même, en $x_0 = 0$, il existe une infinité de solutions qui prennent la valeur $0 = y_0$.

Exemple 3.9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(\mathcal{E}) \ x^3 y' + 2y = 0$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, $(\mathcal{E})$ est équivalente à $y' = -2x^{-3}y$. Les solutions sont alors générées par la fonction

$$x \in \mathbb{R}^* \rightarrow \exp(1/x^2) \in \mathbb{R}.$$

Une éventuelle solution y sur $\mathbb{R}$ vérifie :

$$\begin{cases} y(x) = C_1 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right), & x < 0, \\ y(x) = C_2 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right), & x > 0, \\ y(0) = 0, & \text{d'après } (\mathcal{E}). \end{cases} \quad (3.5)$$

Réciproquement, si nous définissons y par les formules données en (3.5), alors y sera solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si y est dérivable en 0 car les autres conditions seront vérifiées par construction.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$, la seule solution possible est la fonction nulle.

Enfin nous faisons quelques mises en garde concernant les équations différentielles d'ordre 1 non linéaires où le Théorème 3.6 n'est plus forcément valable : l'unicité des solutions n'est plus vraie comme en témoigne l'exemple suivant.

Exemple 3.10. Soit l'équation $(\mathcal{E}) \ y' = |y|^{1/2}$ avec pour condition initiale $y(0) = 0$.

Alors la fonction nulle est solution mais ce n'est pas la seule. En fait, il en existe une infinité satisfaisant la même condition initiale : soient $-\infty < t_1 \leq 0 \leq t_2$; alors la fonction

$$\begin{cases} y(t) = \left(\frac{t-t_2}{2}\right)^2, & t > t_2, \\ y(t) = 0, & t_1 \leq t \leq t_2, \\ y(t) = -\left(\frac{t-t_1}{2}\right)^2, & t < t_1, \end{cases} \quad (3.6)$$

est solution de $(\mathcal{E})$.

3.5 Systèmes d'EDO linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse dans cette section à la résolution de systèmes linéaires du type

$$Y'(x) = AY(x) + B(x) \quad x \in I, \quad (\mathcal{E})$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée de taille n à coefficients constants et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ est une fonction à valeurs vectorielles continue sur I .

Comme dans la section précédente, commençons par étudier le cas où le second membre est nul.

Théorème 3.11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E})$

$$Y'(x) = AY(x) \quad x \in I, \quad (\mathcal{E}_h)$$

sont données par

$$Y(x) = \exp(xA)K, \quad K \in \mathbb{K}^n.$$

En particulier, la solution de $(\mathcal{E}_h)$ associée à la condition initiale $(x_0, Y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ est unique.

Par ailleurs, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_h$ est un sev de $\mathcal{F}(I; \mathbb{K}^n)$ de dimension n .

Remarque 3.12. On rappelle que la matrice $\exp(A)$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice définie par

$$\exp(xA) = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots = \sum_{j \geq 0} \frac{A^j}{j!},$$

comme vu au chapitre précédent.

Par ailleurs, notons les règles de calcul suivantes concernant les exponentielles de matrice.

Proposition 3.13. Soient $A, B, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a les propriétés suivantes.

1. Si A et B commutent, alors $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.
2. La matrice $\exp(A)$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$.
3. Si P est inversible, alors $\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$.

Un cas particulier qui nous intéresse particulièrement est celui où la matrice A du système est diagonalisable.

Théorème 3.14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice à coefficients constants diagonalisable, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et $v_1, \dots, v_n$ une base de vecteurs propres associés.

Notons

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto \exp(\lambda_i x) v_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

Alors, la famille de fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_h)$.

En particulier, si $Y_0 \in \mathbb{K}^n$ se décompose dans la base $(v_1, \dots, v_n)$ sous la forme $Y_0 = \sum_{j=1}^n y_j v_j$ alors la solution de $(\mathcal{E}_h)$ telle que $Y(0) = Y_0$ s'écrit

$$Y(x) = \sum_{j=1}^n y_j f_j(x).$$

Remarque 3.15. Dans le cas où A est diagonalisable, il n'est donc pas nécessaire de calculer $\exp(A)$. Dans le cas contraire, on pourra d'abord vérifier si A est nilpotente (si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$), auquel $\exp(A)$ ne contiendra qu'un nombre fini de termes. Dans le cas général on pourra utiliser la décomposition de Dunford, qui stipule que toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé (ce qui est toujours vrai sur $\mathbb{C}$) peut être décomposée en la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente $A = D + N$, qui est une décomposition unique.

Exemple 3.16. On souhaite résoudre le système différentiel

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y(t) \quad t \in \mathbb{R}, \quad Y(0) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Pour cela, on calcule l'exponentielle de la matrice A en remarquant que $A - I_2 =: N$ vérifie $N^2 = 0$. Ainsi,

$$\exp(tA) = \exp(tI_2 + tN) = \exp(tI_2) \cdot \exp(tN) = e^t \cdot (I_2 + tN) = e^t \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Intéressons nous maintenant au problème non homogène. Comme dans le cas d'une EDO scalaire, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante.

Méthode de variation de la constante Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut utiliser la *méthode de la variation des constantes*. Dans le cas où la solution de l'équation homogène $Y'(t) = AY(t)$ est exprimée avec l'exponentielle de matrice, on cherche une solution particulière sous la forme

$$Y_p(x) = \exp(xA)V(x),$$

où $V : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ est la fonction à trouver. Alors

$$Y_p'(x) - AY_p(x) = \exp(xA) V'(x)$$

et il suffit donc de choisir V telle que $\exp(xA)V'(x) = B(x)$, soit par exemple, si $t_0 \in I$,

$$V(x) = \int_{t_0}^x \exp(-uA) B(u) du.$$

On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 3.17. *L'ensemble des solutions de l'équation*

$$Y'(x) = AY(x) + B(x) \tag{\mathcal{E}}$$

est

$$\mathcal{S} = \left\{ Y(x) = \exp(xA) Y_0 + \int_0^x \exp((x-u)A) B(u) du, \quad Y_0 \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

En particulier, la solution de l'équation $(\mathcal{E})$ telle que $Y(0) = Y_0$ est

$$Y(x) = \exp(xA) Y_0 + \int_0^x \exp((x-u)A) B(u) du.$$

On peut aussi utiliser la méthode de variation des constantes à partir d'une base de solutions de l'équation homogène. Soit $f_1, \dots, f_n$ une base de solutions de l'équation homogène $Y'(x) = AY(x)$. On cherche alors une solution sous la forme

$$Y_p(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) f_i(x).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} Y_p'(x) - AY_p(x) &= \sum_{i=1}^n \mu_i'(x) f_i(x) + \sum_{i=1}^n \mu_i(x) f_i'(x) - A \sum_{i=1}^n \mu_i(x) f_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i'(x) f_i(x). \end{aligned}$$

Pour que Y_p soit une solution de $(\mathcal{E})$, il faut et il suffit donc que $\sum_{i=1}^n \mu_i'(t) f_i(t) = B(t)$, soit

$$F(t)X(t) = B(t), \quad \text{avec} \quad F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), \quad X(t) = (\mu_i'(t))_{1 \leq i \leq n}.$$

On aboutit alors à un système de taille $n \times n$, qui possède une unique solution car la matrice $F(t)$ est inversible (ses vecteurs colonnes forment une famille libre).

Proposition 3.18. *L'ensemble des solutions de l'équation*

$$Y'(t) = AY(t) + B(t) \tag{\mathcal{E}}$$

est

$$\left\{ Y(t) = \sum_{i=1}^n \left(y_i + \int_0^t x_i(s) ds \right) f_i(t), \quad (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n, \right\}$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ est la solution du système

$$F(t)X(t) = B(t), \quad \text{avec} \quad F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

En particulier, si Y_0 se décompose dans la base $\{f_1(0), \dots, f_n(0)\}$ de $\mathbb{K}^n$ comme combinaison linéaire $Y_0 = \sum_{i=1}^n y_i f_i(0)$, alors la solution de l'équation $(\mathcal{E})$ telle que $Y(0) = Y_0$ est

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n \left(y_i + \int_0^t x_i(s) ds \right) f_i(t).$$

Exemple 3.19. On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\dot{Y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{:=A} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad Y(0) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

On détermine d'abord les solutions de l'équation homogène associée en calculant l'exponentielle de la matrice A en remarquant que $A - I_2 =: N$ vérifie $N^2 = 0$. Ainsi,

$$\exp(tA) = \exp(tI_2 + tN) = \exp(tI_2) \cdot \exp(tN) = e^t \cdot (I_2 + tN) = e^t \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

On utilise le Théorème 3.17 pour trouver une solution particulière. On anticipe sur le fait qu'ici, on ne cherche que la solution s'annulant en $t = 0$. Il s'agit donc de

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^t e^{t-s} \begin{pmatrix} 1-(t-s) & t-s \\ -(t-s) & 1+t-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^t e^{t-s} \begin{pmatrix} s(t-s) \\ s+s(t-s) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

On calcule séparément les intégrales $\int_0^t s e^{-s} ds$ et $\int_0^t s^2 e^{-s} ds$ pour trouver finalement :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t(t-2) + t + 2 \\ e^t(t-1) + 1 \end{pmatrix}.$$

3.6 EDO linéaires scalaires d'ordre n à coefficients constants

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution d'équation différentielles ordinaires linéaire scalaires d'ordre n , de la forme

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x) \quad \forall x \in I,$$

L'idée principale est de définir les vecteurs

$$Y(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad B(t) = (0, \dots, 0, b(t))$$

et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et d'étudier le système d'EDO d'ordre 1, défini par

$$Y'(t) = AY(t) + B(t),$$

en utilisant les outils de la section précédente.

3.7 Approximation numérique

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $I = [0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant : trouver une fonction y définie sur $[0, T]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(t=0) &= y_0 \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (3.8)$$

La donnée y_0 est appelée *condition initiale* du problème et on peut montrer que ce problème admet une unique solution, sous certaines conditions de régularité sur la fonction f .

Théorème 3.20. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, i.e.

$$\exists L > 0, \quad \forall t \in I, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad (3.9)$$

(pour une norme quelconque de $\mathbb{R}^d$, toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ étant équivalentes). Alors pour toute condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution u définie sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ au problème de Cauchy (3.8).

Si, de plus, f est de classe $\mathcal{C}^r(I \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ avec $r \geq 1$, alors u est de classe $\mathcal{C}^{r+1}(I; \mathbb{R}^d)$.

Remarque 3.21. Ce résultat nous promet donc l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème de Cauchy, sous hypothèse sur la fonction f , mais ne donne pas de façon d'obtenir la solution analytiquement. D'où l'intérêt d'*approcher* la solution à l'aide d'un ordinateur.

Afin d'approcher la solution du ce problème de Cauchy, nous introduisons une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$ en $N \in \mathbb{N}$ sous-intervalles $([t_n, t_{n+1}])_{n \in \{0, \dots, N\}}$ tels que

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$$

et l'objectif est alors de construire une suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$, telle que, pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, l'élément y_n soit une *bonne approximation* de $y(t_n)$. Cette suite est définie par récurrence et la donnée de la formule de récurrence de y_{n+1} en fonction des $(y_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ est appelée *schéma numérique*.

Dans toute la suite, nous faisons l'hypothèse que la subdivision $[0, T]$ est régulière et nous notons h le pas de discrétisation : $h = \frac{T}{N}$.

Définition 3.22. Définissons ici les notions de schémas explicites et implicites.

- Un schéma numérique est dit *explicite* si l'expression de u_{n+1} dépend uniquement des $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ (et ne dépend pas de u_{n+1}). Au contraire, si l'obtention de u_{n+1} dépend de la résolution d'une équation (possiblement non-linéaire) le schéma numérique est dit *implicite*.
- Un schéma numérique est dit à un pas si l'expression de u_{n+1} ne dépend que de u_n (et potentiellement de u_{n+1} s'il est implicite). S'il dépend également des $(u_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ (et potentiellement des $(u_k)_{k \geq n+1}$ si le schéma est implicite) le schéma est dit *multi-pas*.

3.7.1 Le schéma d'Euler explicite

Nous allons construire notre premier schéma numérique. Pour simplifier, considérons que l'EDO à résoudre est une équation scalaire d'ordre 1. Pour cela, il faut construire une suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ qui va approcher la *solution exacte* y aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$. Une façon de faire est d'utiliser la formule de Taylor-Young. Supposons que la solution exacte y est de classe $C^1(I; \mathbb{R}^d)$ (i.e. continue, dérivable et de dérivée continue sur I), pour tout $t \in I$ et pour tout $h > 0$, on a

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + o(h).$$

Or, comme y est solution de l'EDO, on obtient

$$y(t+h) = y(t) = hf(t, y(t)) + o(h).$$

En appliquant cette formule aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$, on obtient alors une formule de récurrence :

$$y(t_1) = y(t_0+h) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) + o(h),$$

$\vdots$

$$y(t_n) = y(t_{n-1}+h) = y(t_{n-1}) + hf(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + o(h).$$

On choisit alors d'approcher les valeurs de y aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ par la suite définie par

$$y_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad \forall 0 \leq n \leq N-1.$$

C'est cette formule de récurrence que l'on appelle *schéma d'Euler explicite*.

Dans le cas d'un système d'EDO d'ordre 1, le schéma s'écrit exactement de la même manière.

Exemple 3.23. Écrire le schéma d'Euler explicite pour le système d'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) + \exp(t), \\ y'(t) = 3x(t) + y(t) + \exp(2t). \end{cases}$$

3.7.2 Le schéma d'Euler implicite

Comme précédemment, supposons que la solution du problème de Cauchy y est de classe $C^1(I; \mathbb{R})$ et appliquons la formule de Taylor-Young à $y(t)$ au lieu de $y(t+h)$, on obtient, en utilisant l'EDO,

$$y(t) = y(t+h-h) = y(t+h) - hy'(t+h) + o(h) = y(t+h) - hf(t+h, y(t+h)) + o(h).$$

En appliquant cette formule aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$, on obtient les relations :

$$y(t_1) + hf(t_1, y(t_1)) = y(t_0) + o(h),$$

$\vdots$

$$y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) = y(t_{n-1}) + o(h),$$

qui ne sont plus des formules explicites mais des équations à résoudre pour déterminer les valeurs de $y(t_n)$ en fonction de $y(t_{n-1})$.

On choisit alors d'approcher les valeurs de y aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ par la suite définie, de façon *implicite*, par

$$y_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y_{n+1} + hf(t_{n+1}, y_{n-1}) = y_n \quad \forall 0 \leq n \leq N-1.$$

C'est cette formule de récurrence que l'on appelle *schéma d'Euler implicite*.

Exemple 3.24. Considérons l'EDO linéaire et scalaire $y'(t) = 3y(t) + \cos(t)$ sur $[0, T]$ munie d'une condition initiale $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$. On définit la fonction f par

$$f : \begin{array}{ccc} [0, T] \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & 3y + \cos(t) \end{array}$$

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $h = \frac{T}{N}$, on définit une discrétisation $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ de $[0, T]$ de pas h , et on construit la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ telle que

$$\begin{aligned} y_0 &\in \mathbb{R}, \\ y_1 + h(3y_1 + \cos(t_1)) &= y_0 \implies (1 + 3h)y_1 = y_0 + \cos(t_1), \\ y_2 + h(3y_2 + \cos(t_2)) &= y_1 \implies (1 + 3h)y_2 - y_1 = \cos(t_2), \\ &\vdots \\ y_n + h(3y_n + \cos(t_n)) &= y_{n-1} \implies (1 + 3h)y_n - y_{n-1} = \cos(t_n). \end{aligned}$$

Or, ce système est équivalent au système matricielle suivant

$$\begin{pmatrix} 1+3h & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1+3h & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1+3h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + \cos(t_1) \\ \cos(t_2) \\ \vdots \\ \cos(t_{n-1}) \\ \cos(t_n) \end{pmatrix}$$

3.7.3 Erreur de convergence d'un schéma numérique

La question que l'on souhaite se poser dans cette section est la suivante : quelle est l'erreur que l'on commet lorsqu'on approche la solution exacte y par sa solution approchée $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ et comment cette erreur dépend de N ou du pas h ?

Définition 3.25. Soient y la solution d'une EDO d'ordre 1 sur un intervalle $[0, T]$ et $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ sa solution approchée aux temps $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$, une discrétisation régulière de $[0, T]$ de pas h .

- L'erreur de convergence au temps t_n est définie comme la différence entre les solutions exacte et approchée :

$$e_n = \|y(t_n) - y_n\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Un schéma numérique est dit convergent si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} \|e_n\| = 0,$$

- Un schéma numérique est dit convergent d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ si il existe une constante $C > 0$, indépendante du pas de discrétisation h telle que

$$\|e_n\| \leq Ch^k.$$

Théorème 3.26. Les schémas d'Euler explicite et d'Euler implicite sont convergents d'ordre 1.

Comment déterminer l'ordre de convergence d'un schéma en pratique ? D'après la définition ci-dessus, on voit que, si l'ordre de convergence est k , alors

$$\|e_n\| \leq Ch^k.$$

Prenons le logarithme de cette inégalité, on obtient

$$\log(\|e_n\|) \leq k \log(h) + \log(C).$$

On remarque alors que, si on trace le logarithme de l'erreur de convergence en fonction du logarithme du pas h , cette erreur doit se comporter au pire comme une droite dont l'ordonnée à l'origine est $\log(C)$ et dont la pente est exactement l'ordre de convergence k . Cette propriété nous donne alors une méthode pour identifier *numériquement* l'ordre de convergence d'un schéma. Cela est utile en particulier pour vérifier que le schéma numérique est bien implémenté et que la résolution numérique est valide !