
TD 2 : ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1.

Résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2x = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Exercice 2.

Déterminer lesquels des ensembles E_1 , E_2 , E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\} & E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\} \\ E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\} & E_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\} \end{aligned}$$

Exercice 3.

Déterminer si les applications suivantes sont linéaires. Pour les applications linéaires, déterminer leur noyau et leur image. En déduire si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives et déterminer leurs matrices associées dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés.

$$\begin{aligned} f_0 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto x + y & f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (2x + y, x - y) \\ f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (xy, x, y) & f_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 &\mapsto (y, 0, x - 7y, x + y) & f_5 : \mathbb{R}_3[X] &\mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \end{aligned}$$

Exercice 4.

- Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3) .
- Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et $w = (1, 2, -3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3) .
- Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
- Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice 5.

Considérons la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ suivante,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'application linéaire f dont A est la matrice associée par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$

Exercice 6.

Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

Calculer, si elle existe, la matrice inverse des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbb{C}) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que B est diagonalisable et trouver $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = B$.
3. Vérifier que C n'est pas diagonalisable.

Exercice 9. La méthode de Hückel

La méthode de Hückel ou méthode d'orbitales moléculaires de Hückel (HMO pour Hückel molecular orbital method), proposée par Erich Hückel en 1930, permet de déterminer les énergies des orbitales moléculaires des électrons π dans les systèmes d'hydrocarbures conjugués, comme l'éthylène, le benzène ou encore le buta-1,3-diène. En pratique, pour un hydrocarbure pur composé de $n > 0$ atomes de carbone, cette méthode consiste à trouver les valeurs propres d'une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$H_{ii} = \alpha, \quad H_{ij} = \beta \quad \text{si les atomes de carbones } i \text{ et } j \text{ sont liés} \quad \text{et} \quad H_{ij} = 0 \quad \text{sinon,}$$

pour tout $i, j \in \{1, n\}$. Le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est l'énergie d'un électron dans une orbitale $2p$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$ est l'énergie d'interaction entre deux orbitales p . Les valeurs propres de H sont alors une approximation des énergies des orbitales moléculaires.

1. On considère la molécule d'éthylène $H_2C = CH_2$. Calculer les énergies de ces orbitales moléculaires par la méthode de Hückel.
2. Même question avec la molécule de butadiène $H_2C = CH - CH = CH_2$ et la molécule de cyclobutadiène (composée d'un cycle de 4 atomes de carbone).