
TD 1 : NOMBRES COMPLEXES, TRIGONOMÉTRIE, FONCTIONS USUELLES

Exercice 1.

Soit z un nombre complexe non nul, qu'on écrit sous forme algébrique $z = a + ib$, avec a et b des réels.

1. Montrer qu'il existe un unique complexe w tel que $zw = 1$. Ce nombre w est appelé *inverse de z* .
2. Mettre l'expression $\frac{1}{a+ib}$ sous la forme $c + id$ avec c et d deux réels à déterminer.
3. Mettre sous la forme $a + ib$, avec a et b des réels, les nombres complexes suivants :

$$\frac{3+6i}{3-4i}, \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}, \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2.

Soient z, w deux nombres complexes.

1. Montrer que $|z|^2 = z\bar{z}$.
2. Montrer que $|zw| = |z||w|$.
3. Montrer que $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.

Exercice 3.

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
2. Écrire $\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
3. En utilisant l'écriture exponentielle des nombres complexes, exprimer $\sin^3(\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\sin(3\theta)$.

Exercice 4.

En utilisant la forme algébrique ou la forme exponentielle des nombres complexes :

1. Calculer les racines carrées de 1 , i , $3 + 4i$, $8 - 6i$ et $7 + 24i$.
2. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et de $\sin(\frac{\pi}{8})$.
3. Calculer les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= 0, & z^2 - (1+2i)z + i - 1 &= 0, & z^2 - \sqrt{3}z - i &= 0, \\ z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) &= 0, & z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i &= 0, & 4z^2 - 2z + 1 &= 0, \\ & & z^4 + 10z^2 + 169 &= 0, & z^4 + 2z^2 + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 6.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. De même, on note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$\text{a) } X^3 - 3, \quad \text{b) } X^{12} - 1, \quad \text{c) } X^6 + 1, \quad \text{d) } X^9 + X^6 + X^3 + 1.$$

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^4 f(t) dt$.
2. Soit $x \in [0, 4]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0, 4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0, 4]$?

Exercice 8.

Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x dx$
2. $\int x \arctan x dx$
3. $\int \ln x dx$ puis $\int (\ln x)^2 dx$
4. $\int \cos x \exp x dx$

Exercice 9.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ (intégration par parties)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$ (À l'aide d'un changement de variable simple)
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ (changement de variable $x = \tan t$)
4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$ (décomposition en éléments simples)
5. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx$ (changement de variable $u = \frac{1}{x}$)

Exercice 10.

Définissons sur $\mathbb{R}$ les deux fonctions suivantes

$$f(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \leq t \leq 1/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer les intégrales suivantes :

1. $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp\left(\frac{-2i\pi nt}{2\pi}\right) dt$
2. $\hat{g}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t) \exp(-2i\pi \nu t) dt$

Remarque : Les $c_n(f)$ sont appelés coefficients de Fourier de f et $\hat{g}$ est appelée transformée de Fourier de g (voir chapitre 4).