
TD 3 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Exercice 1.

Dans un tissu radioactif, les lois de la physique permettent d'affirmer que la vitesse de désintégration des noyaux radioactifs (à l'instant t) est proportionnelle au nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs présents dans le tissu à l'instant t .

Ce phénomène, appelé désintégration radioactifs, peut être modélisé par le problème de Cauchy suivant :

$$N'(t) + \lambda N(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad N(0) = N_0.$$

où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant $t = 0$ et $\lambda > 0$.

1. Déterminer l'expression de $N(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la période de demi-vie, c'est-à-dire la valeur de T telle que $N(T) = \frac{N_0}{2}$.

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y'(t) = 1$, $y(-1) = 2$, sur $\mathbb{R}$.
3. $y'(t) = \frac{1}{t}$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}_-^*$.
4. $y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = \frac{\cos t}{t^2}$, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.
5. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = t^k e^t, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 10. \end{cases}$$

Exercice 3.

Résoudre les équations suivantes avec une attention particulière pour les questions d'existence et d'unicité des solutions ainsi que pour leur intervalle maximal de définition.

1. $ty'(t) - y(t) = t$, $y(1) = 1$,
2. $ty'(t) - 2y(t) = t^2 + 1$,
3. $(1 - t^2)y'(t) - 2ty(t) = t^2$.

Exercice 4.

1. Pour $N = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que

$$\exp(tN) = \begin{pmatrix} 1 & at \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\exp(tA) = \exp(at) \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A .
2. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
3. Trouver une matrice de passage P telle que

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

5. En déduire $\exp(tA)$.

Exercice 6.

Résoudre les systèmes différentielles suivants.

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x - 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = 2x + y - z \\ z' = 2x + 2y - 3z \end{cases}$$

Exercice 7.

Soit $Y_0 = (x_0, y_0, z_0)^T \in \mathbb{R}^3$ et $\omega \in \mathbb{R}$, on cherche $Y : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto Y(t) = (x(t), y(t), z(t))^T \end{cases}$ solution du système

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + z(t) + \cos(\omega t) \\ y'(t) = y(t) + z(t) + \sin(\omega t) \\ z'(t) = z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

1. Écrire le système homogène associée à ce système différentiel.
2. En utilisant les résultats de l'exercice 5, expliciter les solutions du système homogène.
3. En utilisant la méthode de la variation de la constante, expliciter la solution de ce système différentiel.

Exercice 8.

Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y en précisant les comportements asymptotiques en $t = +\infty$.

1. $y'' - 3y' + 2y = te^t$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y'' - y = e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $y'' - 2y' + y = t$ sur $\mathbb{R}$.
4. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = t^2e^t$ sur $\mathbb{R}$.